目 录

第1章　命题逻辑

逻辑学是一门研究思维形式和思维规律的科学。思维形式的结构包括概念、判断和推理以及它们之间的关系。其中,概念是思维的基本单位;判断是通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答;由一个或者几个判断推出另一个判断的思维过程就是推理。

使用自然语言研究逻辑非常困难,于是英国数学家布尔运用数学的方法,使用一套特定的符号系统来表达各种推理的逻辑关系,建立了与古典逻辑完全不同的新逻辑——数理逻辑,也称之为符号逻辑。

数理逻辑又可分为命题逻辑和谓词逻辑,其中命题逻辑是基础。命题逻辑也称命题演算,它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的关系。

数理逻辑与数学的其他分支、计算机科学与技术、人工智能、语言学等学科均有密切联系。我们主要介绍数理逻辑最基本的内容:命题逻辑和谓词逻辑。本章介绍命题逻辑,谓词逻辑在第 2 章介绍。

本章学习目标

- 掌握命题、命题公式、联结词、等价式、蕴含式、对偶及范式等概念
- 掌握命题的符号化方法
- 掌握基本等价式、基本蕴含式和常用推理规则
- 能应用逻辑推理解决一些实际问题

1.1 命题及其表示

1.1.1 命题的基本概念

数理逻辑研究的问题是推理，推理包含前提和结论，前提和结论都是表达判断的陈述句，因而表达判断的陈述句就成为推理的基本要素。

定义 1.1.1 具有唯一真值的陈述句称为命题。

命题的判断结果称为命题的真值，常用 T(True)（或 1）表示真，F(False)（或 0）表示假。真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。

从上述的定义可知，命题有两个要素：一是陈述句，二是具有唯一真值。

例 1 判断下列句子是否为命题。

(1)北京是中国的首都。

(2)桂林山水真美啊！

(3)煤是白的。

(4)下午有课吗？

(5) $x + y = 9$。

(6) 这是假的。

(7)$9 + 1 \leqslant 8$。

(8)$1 + 11 = 100$。

(9) 请保持安静！

(10) 火星上有生物。

解 在上述的十个句子中，(2) 为感叹句，(4) 为疑问句，(9) 为祈使句，(5)(6) 虽然是陈述句，但(5) 没有确定的真值，其真假依 x,y 取值的不同而有所不同，(6) 是悖论(即由真能推出假，由假也能推出真)，所以(2)，(4)，(5)，(6)，(9) 均不是命题。(1)，(3)，(7)，(8)，(10) 都是命题，其中(10) 虽然目前还不能判断其真假，但随着科技的进步是可以判定其真假的。

由此可见，一个陈述句能否分辨真假与是否知道其真假是两回事，即命题的真假只要求它有且唯一就可以了，而不要求立即给出，如例 1 中的(10)。又如例 1 中的(8)，它的真假意义和上下文有关，当作为二进制数时，它是真命题，否则为假命题。

1.1.2　原子命题与复合命题

根据命题的结构形式，命题分为原子命题和复合命题。

定义 1.1.2　不能被分解为更简单的陈述句的命题称为原子命题。由两个或两个以上原子命题组合而成的命题称为复合命题。

例如，例 1 中的命题全为原子命题，而命题“小刘和小赵都是大学生”是复合命题，它由“小刘是大学生”与“小赵是大学生”两个原子命题组成。

命题通常用大写字母 $P,Q,R,\cdots$ 等表示。如 P：今天下雨，即 P 表示命题“今天下雨”。

表示命题的符号称为命题标识符，命题标识符依据表示命题的情况，分为命题常元和命题变元。一个表示确定命题的标识符称为命题常元（或命题常项）；没有指定具体内容的命题标识符称为命题变元（或命题变项）。命题变元的真值情况不确定，因而命题变元不是命题。只有命题变元 P 表示一具体的命题时，P 才有确定的真值，此时 P 才成为命题。

习题 1.1

1. 判断下列语句是否为命题，若是，指出其真值。

(1) 外面下雨吗？

(2) 7 能被 2 整除。

(3) $2x+3<4$。

(4) 请关上门。

(5) 小红在教室里。

2. 指出下列命题是原子命题还是复合命题。

(1) 小李一边听音乐，一边写作业。

(2) 北京不是中国的首都。

(3) 大雁北回，春天来了。

(4) 不是你死，就是我活。

(5) 张三和李四是同学。

1.2 逻辑联结词

本节介绍5种常用的逻辑联结词，分别是“非”(否定联结词)，“与”(合取联结词)，“或”(析取联结词)，“若…则…”(条件联结词)，“…当且仅当…”(双条件联结词)，通过这些联结词可以把若干个原子命题联结成一个复合命题。

1.2.1 否定($\neg$)

定义 1.2.1 设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题，记为 $\neg P$(读作非 P)。并规定：

$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假。

$\neg P$ 的真值情况依赖于 P 的取值情况，真值情况见表 1-1。

表 1-1

P	$\neg P$
1	0
0	1

在自然语言中，常用“非”、“不”、“没有”、“无”、“并非”等来表示否定。

例 1 设 P：6 是偶数。则 P 的否定，即“6 不是偶数”，用符号表示为 $\neg P$。由于 P 的真值为 1，所以 $\neg P$ 真值为 0。

设 Q：所有的海洋动物都是哺乳动物。则 $\neg Q$：不是所有的海洋动物都是哺乳动物。

Q 的真值为 0，$\neg Q$ 的真值为 1。

1.2.2 合取($\wedge$)

定义 1.2.2 设P,Q为两个命题,P和Q的合取是一个复合命题,记为$P \wedge Q$(读作P与Q),称为P与Q的合取式。规定P与Q同时为T时,$P \wedge Q$为T,其余情况下,$P \wedge Q$均为F。

联结词"$\wedge$"的真值情况见表1-2。

表1-2 联结词"$\wedge$"的真值情况

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

显然$P \wedge \neg P$的真值永远是假。

在自然语言中,常用"既…又…"、"不但…而且…"、"虽然…但是…"、"一边…一边…"等表示合取。

例2 (1)2是素数又是偶数。

(2)猫吃老鼠且太阳从西方升起。

(3)张三虽然聪明但不用功。

解 (1)设P:2是素数,Q:2是偶数。则(1)可表示为$P \wedge Q$。

(2)设P:猫吃老鼠,Q:太阳从西方升起。则(2)可表示为$P \wedge Q$。

(3)设P:张三聪明,Q:张三用功。则(3)可表示为$P \wedge \neg Q$。

需要注意的是,在自然语言中,命题(2)是没有实际意义的,因为P与Q两个命题是互不相干的,但在数理逻辑中是允许的。数理逻辑中只关注复合命题的真值情况,并不关心原子命题之间是否存在着内在联系。

1.2.3 析取($\vee$)

定义 1.2.3 设P,Q为两个命题,P和Q的析取是一个复合命题,记为$P \vee Q$(读作P或Q),称为P与Q的析取式。规定:当且仅当P与Q同时为F时,$P \vee Q$为F,否则$P \vee Q$均为T。

析取联结词"$\vee$"的真值情况见表 1-3。

表 1-3　联结词"$\vee$"的真值情况

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

显然 $P \vee \neg P$ 的真值永远为真。

析取联结词"$\vee$"与汉语中的"或"二者表达的意义不完全相同,汉语中的"或"可表达"不可兼或",也可表达"可兼或",而从析取联结词的定义可看出,"$\vee$"允许 P,Q 同时为真,因而析取联结词"$\vee$"是可兼或。

例 3　(1) 赵四是这次运动会的 100 米跑冠军或跳高冠军。

(2) 王五身高 172cm 或 176cm。

解　(1) 为可兼或,(2) 为不可兼或。

设 P:赵四是这次运动会的 100 米跑冠军,Q:赵四是这次运动会的跳高冠军。则(1) 可表示为 $P \vee Q$。

设 P:王五身高 172 cm,Q:王五身高 176 cm。则(2) 可表示为$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

1.2.4　条件($\rightarrow$)

定义 1.2.4　设 P,Q 为两个命题,P 和 Q 的条件命题是一个复合命题,记为 $P \rightarrow Q$(读作若 P 则 Q),其中 P 称为前件,Q 称为后件。规定:当且仅当前件 P 为 T,后件 Q 为 F 时,$P \rightarrow Q$ 为 F,否则 $P \rightarrow Q$ 均为 T。

条件联结词"$\rightarrow$"的真值情况见表 1-4。

表 1-4　联结词"$\rightarrow$"的真值情况

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在自然语言中，常会出现的语句如“只要 P 就 Q”，“因为 P 所以 Q”，“ P 仅当 Q”，“只有 Q 才 P”，“除非 Q 才 P” 等都可以表示为“$P \rightarrow Q$” 的形式。

例 4　(1) 如果煤是白色的，则太阳从西方升起。

(2) 只有天气好时，我才去游泳。

解　(1) 设 P：煤是白色的，Q：太阳从西方升起。则(1) 可表示为 $P \rightarrow Q$。

(2) 设 R：天气好，S：我去游泳。则(2) 可表示为 $S \rightarrow R$。

1.2.5.双条件($\leftrightarrow$ 或 $\leftrightarrows$)

定义 1.2.5　设 P，Q 为两个命题，其复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 称为双条件命题，$P \leftrightarrow Q$ 读作 P 当且仅当 Q。规定：当且仅当 P 与 Q 真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 为 T，否则 $P \leftrightarrow Q$ 均为 F。

双条件联结词“$\leftrightarrow$” 的真值情况如表 1 - 5 所示。

表 1 - 5　联结词“$\leftrightarrow$” 的真值情况

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 5　(1) 煤是白色的当且仅当太阳从西边升起。

(2) 两个三角形全等，当且仅当它们的对应边相等。

(3) 两个三角形相似，当且仅当它们的对应边相等。

解　(1) 设 P：煤是白色的，Q：太阳从西边升起。则(1) 可表示为 $P \leftrightarrow Q$，其真值为 T。

(2) 设 R：两个三角形全等，S：两个三角形的对应边相等。则(2) 可表示为 $R \leftrightarrow S$，其真值为 T。

(3) 设 U：两个三角形相似，W：两个三角形的对应边相等。则(3) 可表示为 $U \leftrightarrow W$，但其真值为 F。

与前面的联结词一样，条件联结词和双条件联结词连接的两个命题之间可以没有任何的因果联系，只要能确定复合命题的真值即可。

习题 1.2

1. 指出下列命题的真值：

(1) 若 $2+2>4$，则太阳从西方升起。

(2) 若 $a \in \varphi$，则 $a \in A$。

(3) 胎生动物当且仅当是哺乳动物。

(4) 指南针永指北方，除非它旁边有磁铁。

(5) 除非 $ABCD$ 是平行四边形，否则它的对边不都平行。

2. 设 P：天气好，Q：我去公园。请将下列命题用符号表示。

(1) 如果天气好，我就去公园。

(2) 只要天气好，我就去公园。

(3) 只有天气好，我才去公园。

(4) 我去公园，仅当天气好。

(5) 或者天气好，或者我去公园。

(6) 天气好，我去公园。

1.3 命题公式与符号化

1.3.1 命题公式

上一节介绍了 5 种常用的逻辑联结词，利用这些逻辑联结词可将具体的命题用符号表示。对于较为复杂的命题，需要由这 5 种逻辑联结词中的若干个经过各种相互组合才能得到其表示成符号化的形式，那么怎样的组合形式才是符合逻辑的表示形式呢？我们将这些符合逻辑的组合形式称为命题公式（又称合式公式，或简称公式），见下述定义：

定义 1.3.1 (1) 单个的命题变元是命题公式。

(2) 如果 A 是命题公式，那么 $\neg A$ 也是命题公式。

(3) 如果 A,B 是命题公式，那么($A \wedge B$)，($A \vee B$)，($A \rightarrow B$) 和($A \leftrightarrow B$) 也是命题公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3) 所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是命题公式。

由定义知，命题公式是没有真假的，仅当一个命题公式中的命题变元被赋以确定的命题时，才是命题。例如在公式 $P \rightarrow Q$ 中，把命题“$1+2=3$”赋给 P，把命题“太阳从西边升起”赋给 Q，则公式 $P \rightarrow Q$ 为假命题；但若 P 的赋值不变，而把命题“太阳从东边升起”赋给 Q，则公式 $P \rightarrow Q$ 为真命题。

例 1 $\neg(P \wedge Q)$，$(P \rightarrow (Q \wedge R))$，$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R))$ 都是命题公式，而 $P \rightarrow (\wedge Q)$，$P \wedge \vee Q$，$(P \rightarrow Q(P \rightarrow Q) \rightarrow R)$ 都不是命题公式。

为了命题公式的简洁，规定：(1) 逻辑联结词的优先级别由高到低依次为 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。(2) 具有相同级别的联结词，按出现的先后次序进行计算。有了上述规定，命题公式中有的括号可以省略。

例 2 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ 可以写成 $P \wedge Q \rightarrow R$，$(P \vee Q) \vee R$ 可写成 $P \vee Q \vee R$，$((P \leftrightarrow Q) \rightarrow R)$ 可写成 $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow R$，而 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 中的括号不能省略。

定义 1.3.2 设 P 是命题公式 Q 的一部分，且 P 也是命题公式，则称 P 为 Q 的子公式。

例如 $P \wedge Q$ 及 R 都是公式 $P \wedge Q \rightarrow R$ 的子公式；$\neg P$，$\neg P \vee Q$ 及 $P \rightarrow R$ 都是公式 $(\neg P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R)$ 的子公式。

1.3.2 命题的符号化

根据命题公式的定义，把一个由文字描述的命题相应地写成由命题标识符、逻辑联结词和圆括号表示的命题形式称为命题的符号化。

命题符号化的一般步骤：(1) 明确给定命题的含义；(2) 找出命题中的各原子命题，分别符号化；(3) 使用合适的逻辑联结词将原子命题连接起来。

例 3 张三和李四都是班干。

设 P：张三是班干，Q：李四是班干。则命题符号化为：$P \wedge Q$。

例 4 (1) 只有天气好，我才去游泳。

这个命题的意义也可以理解为：如果我去游泳，那么天气一定好。

设 P：天气好，Q：我去游泳。则命题符号化为：$Q \rightarrow P$。

该命题也可符号化为：$\neg P \rightarrow \neg Q$。

(2) 仅当天不下雨且我有时间，我才上街。

设 P：天下雨，Q：我有时间。R：我上街。命题符号化为：$R \rightarrow (\neg P \wedge Q)$。

(3) 你将失败，除非你努力。

这个命题的意义可以理解为：如果你不努力，那么你将失败。

设 P：你努力，Q：你失败。则命题符号化为：$\neg P \rightarrow Q$。

(4)A 中没有元素，A 就是空集。

设 P：A 中有元素，Q：A 是空集。则命题符号化为：$\neg P \leftrightarrow Q$。

(5) 张三与李四是同学。

此命题是一个原子命题，"… 与 … 是 …"表示两个对象之间的关系。"张三是同学"及"李四是同学"都不是命题。所以上述命题只能符号化为 P 的形式。其中 P：张三与李四是同学。

例 5 将下列命题符号化。

(1) 如果明天早上下雨或下雪，则我不去上街。

(2) 如果明天早上不下雨且不下雪，则我去上街。

(3) 如果明天早上不是雨夹雪，则我去上街。

(4) 当且仅当明天早上不下雨且不下雪时，我才去上街。

解 设 P：明天早上下雨，Q：明天早上下雪，R：我去上街。

(1) 符号化为：$(P \vee Q) \rightarrow \neg R$。

(2) 符号化为：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。

(3) 符号化为：$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$。

(4) 符号化为：$\neg P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$。

例 6 将下列命题符号化。

(1) 如果张三和李四都不去，则王五去。

(2) 如果张三和李四不都去，则王五去。

解 设 P：张三去，Q：李四去，R：王五去。

(1) 符号化为：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。

(2) 符号化为：$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 或 $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow R$。

例 7　将下列命题符号化。

(1) 说命题逻辑无用且枯燥无味是不对的。

(2) 若天不下雨，我就上街；否则在家。

(3) 他虽聪明，但不用功。

解　(1) 设 P：命题逻辑是有用的，Q：命题逻辑是枯燥无味的。则命题符号化为：$\neg(\neg P \wedge Q)$。

(2) 设 P：天下雨，Q：我上街，R：我在家。则命题符号化为：$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$。

(3) 设 P：他聪明，Q：他用功。则命题符号化为：$P \wedge \neg Q$。

习题 1.3

1. 判断下列各式子是否是命题公式。

(1) $P \rightarrow (Q \wedge R)$。

(2) $(P \leftrightarrow (Q \rightarrow R))$。

(3) $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow R))$。

(4) $PQ \rightarrow R$。

(5) $((R \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q))$。

(6) $(P \vee QR) \rightarrow S$。

2. 将下列命题符号化。

(1) 我去新华书店，仅当我有时间。

(2) 我们不能既划船又跑步。

(3) 只要努力学习，成绩就会好的。

(4) 或者你没有给我写信，或者它在路上丢了。

(5) 如果上午不下雨，我就去看电影，否则我就在家里读书或看报纸。

(6) 我今天进城，除非下雨。

(7) 如果太阳没出来，则或者下雨或者阴天而且温度下降。

(8) 指南针永指南北，除非它旁边有磁铁。

(9) 人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。

1.4 真值表与等价公式

1.4.1 真值表

定义 1.4.1 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在命题公式 A 中的全部命题变元，给 P_1，$P_2,\cdots,P_n$ 各指定一个真值，称为对公式 A 的一个指派（或解释或真值赋值）。

若指定的一组值使公式 A 的真值为 1，则这组值称为公式 A 的成真指派。

若指定的一组值使公式 A 的真值为 0，则这组值称为公式 A 的成假指派。

例如，对公式 $(P \to Q) \wedge R$，给定指派 011（即令 $P=0,Q=1,R=1$），则可得到公式的真值为 1；若给定指派 000，则公式真值为 0。因此，011 为公式的一个成真指派；000 为公式的一个成假指派。除了上述的两种指派外，公式的指派还有 000，001，…等。一般地，在含有 n 个命题变元的命题公式中，共有 2^n 种指派。

定义 1.4.2 将命题公式 A 在所有指派下的取值情况列成表，称为公式 A 的真值表。

构造真值表的一般步骤：

(1) 找出公式中所有的命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，列出 2^n 种指派，建议按二进制数从小到大的顺序，即按照从 00…0 开始到 11…1 的顺序列出，以避免漏写或写重。

(2) 当公式较为复杂时，按照运算的顺序列出各层次的子公式，并计算其对应真值。

(3) 根据各指派顺序计算出各层次的子公式对应真值，直至计算出命题公式的对应真值。

例 1 求下列命题公式的真值表。

(1) $A=(p \wedge (p \to q)) \to q$ 。

(2) $B=\neg(p \to q) \wedge q$。

(3) $C=p \wedge (q \vee \neg r)$。

解　(1) 公式 A 的真值表如表 1-6 所示。

表 1-6　公式 A 的真值表

p	q	$p \to q$	$p \land (p \to q)$	$(p \land (p \to q)) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(2) 公式 B 的真值表如表 1-7 所示。

表 1-7　公式 B 的真值表

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \land q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

(3) 公式 C 的真值表如表 1-8 所示。

表 1-8　公式 C 的真值表

p	q	r	$\neg r$	$q \lor \neg r$	$p \land (q \lor \neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

定义 1.4.3　设 A 为一个命题公式。

(1) 若 A 在它的所有可能赋值下取值均为真，则称 A 为重言式或永真式；

(2) 若 A 在它的所有可能赋值下取值均为假，则称 A 为矛盾式或永假式；

(3) 若 A 至少存在一个赋值是成真赋值，则称 A 为可满足式。

由定义可知，重言式一定是可满足式，但反之不成立。

从公式 A 的真值表构造过程可以看出，若公式 A 所在的列(我们规定在真值表的最后一列）中某行的值为 1，则表明该行所对应的公式 A 的指派为成真指派；若值为 0，则表明该行所对应的公式 A 的指派为成假指派。

由此可见，若公式 A 的真值表最后一列的值全部为 1，则公式 A 的所有指派都是成真指派，即公式 A 为重言式；若 A 的真值表最后一列的值全为 0，则公式 A 的所有指派都是成假指派，即公式 A 为矛盾式；若 A 的真值表最后一列的值中有 0 也有 1，则公式 A 的所有赋值中至少有一个成真指派和至少有一个成假指派，即公式 A 仅为可满足式。显然 $P \vee \neg P$ 是重言式，$P \wedge \neg P$ 是矛盾式。又如例 1 中的公式 A，B 和 C 分别是重言式、矛盾式和可满足式。

1.4.2 等价公式

定义 1.4.4 给定两个命题公式 A 和 B，设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是所有出现在命题公式 A 和 B 中的命题变元。若给 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 任一组真值指派，公式 A 和 B 的真值都对应相等，则称 A 与 B 等价，记作 $A \Leftrightarrow B$。

“$\Leftrightarrow$”具有如下的性质：(1) 自反性：$A \Leftrightarrow A$。(2) 对称性：若 $A \Leftrightarrow B$，则 $B \Leftrightarrow A$。(3) 传递性：若 $A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$。

证明两个公式等价一般有两种方法：真值表法和等值演算法。

1. 真值表法

由公式等价的定义可知，利用真值表可以判断任何两个公式是否等价。

例 1 证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$。

证明 命题公式 $P \leftrightarrow Q$ 和 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 的真值表见表 1-9。

由表 1-9 可知，在任意赋值下，$P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 两者的真值对应相同。因此 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$。

表 1-9 $P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 的真值表

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

例 2　问公式 $P \to Q$ 和 $\neg P \to \neg Q$ 是否等价？

解　公式 $P \to Q$ 和 $\neg P \to \neg Q$ 的真值表见表 1-10。

表 1-10　$P \to Q$ 与 $\neg P \to \neg Q$ 的真值表

P	Q	$P \to Q$	$\neg P \to \neg Q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

由表 1-10 可知，公式 $P \to Q$ 和 $\neg P \to \neg Q$ 不是等价的。

从理论上来讲，利用真值表法可以判断任何两个命题公式是否等价，但当公式中命题变元较多时，其计算量较大。例如，当公式中有 5 个变元时，需要列出 $2^5 = 32$ 种赋值情况，计算较为繁杂。因此，当公式中命题变元较多时，通常采用等值演算法证明两个命题公式是否等价。所谓等值演算法，就是由已知等价式推出另外的等价式的过程和方法。下面给出 12 组常用的等价公式，读者可利用真值表法给出证明，它们是等值演算法的基础。

(1) 对合律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$。

(2) 结合律：$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$，$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$，$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$。

(3) 交换律：$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$，$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$，$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$。

(4) 分配律：$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$，$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$。

(5) 幂等律：$A \vee A \Leftrightarrow A$，$A \wedge A \Leftrightarrow A$。

(6) 吸收律：$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$，$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$。

(7) 德摩根律：$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$，$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$。

(8) 同一律：$A \vee F \Leftrightarrow A$，$A \wedge T \Leftrightarrow A$。

(9) 零律：$A \vee T \Leftrightarrow T$，$A \wedge F \Leftrightarrow F$。

(10) 否定律：$A \vee \neg A \Leftrightarrow T$，$A \wedge \neg A \Leftrightarrow F$。

(11) 条件等价式：$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$。

(12) 双条件等价式：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$。

2.等值演算法

先介绍两个定理(代入规则和置换规则)。

定理1.4.1(代入规则) 在一个永真式A中,任何一个原子命题变元R出现的每一处用另一个公式代入,所得的公式B仍为永真式。

证明 因为永真式对于任何指派,其真值都是1,与每个命题变元指派的真假无关,所以,用一个命题公式代入到原子命题变元R出现的每一处,所得到的命题公式的真值仍为1。

例如,$R \vee \neg R$是永真式,将原子命题变元R用$P \rightarrow Q$代入后得到的式子$(P \rightarrow Q) \vee \neg(P \rightarrow Q)$仍为永真式。

定理1.4.2(置换规则) 设X是命题公式A的一个子公式。若$X \Leftrightarrow Y$,则将公式A中的X用Y来置换,所得到的公式B与公式A等价,即$A \Leftrightarrow B$。

证明 因为$X \Leftrightarrow Y$,所以在相应变元的任一种指派情况下,X与Y的真值相同,故以Y取代X后,公式B与公式A在相应的指派情况下真值也必相同,因此$A \Leftrightarrow B$。

例如,$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$,用$R \wedge S$置换$P$,有$(R \wedge S) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(R \wedge S) \vee Q$。

由12组等价公式及代入规则和置换规则,可推演出更多的等价式。

例3 证明下列等价式。

(1)$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$。

(2)$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$。

证明 (1)$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R$ (条件等价式)

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R)$ (结合律)

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \rightarrow R)$ (条件等价式)

$\Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ (条件等价式)

(2)$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow T \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge T$ (否定律)

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ (同一律)

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$ (德摩根律)

习题 1.4

1. 求下列公式的真值表。

(1) $P \to (Q \vee R)$。

(2) $P \vee (Q \to R)$。

(3) $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$。

(4) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$。

2. 证明下列等价公式。

(1) $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$。

(2) $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$。

(3) $A \to (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \to C$。

(4) $(P \to Q) \wedge (P \to R) \Leftrightarrow P \to (Q \wedge R)$。

1.5　蕴含式

在介绍蕴含式前，先介绍等价式与双条件的关系。

1.5.1　等价式与双条件的关系

定理 1.5.1　设 A，B 为两个命题公式。$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为重言式。

证明　若 $A \Leftrightarrow B$，则在 A，B 所含命题变元的任何指派下，A 与 B 的真值都相同，即 $A \leftrightarrow B$ 恒为真。

若 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，由重言式的定义知，在对 A，B 所含命题变元的任何指派下，A 与 B 都有相同的真值，即 $A \Leftrightarrow B$，证毕。

例 1　证明 $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ 为重言式。

证明　由上节的例 1 知 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$，故依据定理 1.5.1 知 $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ 为重言式。

1.5.2 蕴含式

定义 1.5.1 设 A,B 为两个命题公式。若 $A\to B$ 为重言式，则称“A 蕴含 B”，记作 $A\Rightarrow B$。

蕴含关系具有如下的性质：

(1) 自反性：对任意的公式 P，有 $P\Rightarrow P$。

(2) 反对称性：对任意的公式 P,Q，若 $P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$，则有 $P\Leftrightarrow Q$。

(3) 传递性：对任意的公式 P,Q,R，若 $P\Rightarrow Q,Q\Rightarrow R$，则有 $P\Rightarrow R$。

定理 1.5.2 $A\Leftrightarrow B$ 的充分必要条件是 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$。

证明 若 $A\Leftrightarrow B$，则 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，而 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$，故 $A\to B$ 且 $B\to A$ 均为重言式，即 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$。

反之，若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，则 $A\to B$ 且 $B\to A$ 均为重言式，于是 $(A\to B)\wedge(B\to A)$ 为重言式，即 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，故 $A\Leftrightarrow B$。

由定义 1.5.1 知，要证明 $A\Rightarrow B$，只需证明 $A\to B$ 为重言式即可。因此，前面介绍的真值表法和等值演算法均可应用。

下面综合介绍证明 $A\Rightarrow B$ 的几种方法。

1. 真值表法

例 1 证明 $P\wedge Q\Rightarrow P$。

证明 只需证明 $P\wedge Q\to P$ 为重言式。真值表见表 1-11。

表 1-11 $P\wedge Q\to P$ 的真值表

P	Q	$P\wedge Q$	$P\wedge Q\to P$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

2. 等值演算法

例 2 证明 $P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$。

证明 只需证明 $P\wedge(P\to Q)\to Q$ 为重言式。

$P\wedge(P\to Q)\to Q\Leftrightarrow\neg(P\wedge(\neg P\vee Q))\vee Q$

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(\neg P \vee Q) \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow 1$

即 $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 为重言式，所以 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$。

3. 分析法

分析法包括以下两种形式：

(1) 若当前件 A 为真时，推出后件 B 也为真，则 $A \Rightarrow B$。

(2) 若当后件 B 为假时，推出前件 A 也为假，则 $A \Rightarrow B$。

理由是：(1) 若当 A 为真时，推出 B 也为真，则 $A \rightarrow B$ 为真；而当 A 为假时，无论 B 是真是假，$A \rightarrow B$ 总为真；所以当前件 A 为真时，能推出后件 B 也为真，则 $A \rightarrow B$ 为永真式，即 $A \Rightarrow B$。

(2) 若当后件 B 为假时，推出前件 A 也为假，即后件 B 为假，前件 A 总为假，因此不存在 A 为真 B 为假的可能，所以 $A \rightarrow B$ 为重言式，即 $A \Rightarrow B$。

例 3　证明(1) $\neg Q \wedge (P \vee Q) \Rightarrow P$。

(2) $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$。

证明　(1) 假设前件 $\neg Q \wedge (P \vee Q)$ 为真，则 $\neg Q$ 为真，$P \vee Q$ 为真；由此有 Q 为假，P 为真。因此 $\neg Q \wedge (P \vee Q) \Rightarrow P$。

(2) 假设后件 Q 为假。

若 P 为真，则 $P \rightarrow Q$ 为假，有 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为假。

若 P 为假，则 $P \rightarrow Q$ 为真，有 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为假。

综上，若后件 Q 为假，无论 P 为真还是为假，前件 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 均为假。因此 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$。

习题 1.5

1. 指出下列命题公式哪些是重言式、矛盾式和可满足式。

(1) $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$。

(2) $(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \wedge \neg R \wedge Q)$。

(3) $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$。

(4) $(\neg P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$。

2. 证明下列蕴含式。

(1) $(P \rightarrow Q) \Rightarrow P \rightarrow (P \wedge Q)$。

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \Rightarrow P \vee Q$。

(3) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$。

(4) $((P \vee \neg P) \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee \neg P) \rightarrow R) \Rightarrow Q \rightarrow R$。

3. 判断下列命题的真假。

(1) 重言式的否定是矛盾式。

(2) 矛盾式的否定是重言式。

(3) 不是重言式就是矛盾式。

(4) 不是矛盾式就是重言式。

(5) 重言式必是可满足式。

(6) 不是矛盾式就是可满足式。

(7) 可满足式未必是重言式。

(8) 不是可满足式就是矛盾式。

1.6 最小联结词组

1. 最小联结词组

前面介绍了五个联结词，但命题公式中的某些联结词可用另外的联结词代替。如：

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$；

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$；

$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$；

$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$。

这说明“$\leftrightarrow$”可以转化为“$\rightarrow$”，而“$\rightarrow$”可转化为由“$\neg$”与“$\vee$”表示，而“$\vee$”与“$\wedge$”又可以相互转化。

由 5 个联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ 中的若干个构成的命题公式，都可化为由“$\neg$，$\wedge$”或“$\neg$，$\vee$”构成的与之等价的命题公式，我们称“$\neg$，$\wedge$”和“$\neg$，$\vee$”为命题公式的最小联结词组。

通常为了命题表示的简洁清楚，常用包含 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 的联结词组来表示命题。

习题 1.6

1. 将下列命题公式用只含联结词 $\vee$ 和 $\neg$ 的等价式表示，并要求尽可能简单。

(1) $(P \wedge Q) \wedge \neg P$。

(2) $(P \rightarrow (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$。

(3) $\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \rightarrow P)$。

1.7　范式

1.7.1　对偶式

1. 对偶式

定义 1.7.1　在只含有逻辑联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 的命题公式 A 中，若把 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换，T 与 F 互换得到一个新的命题公式 A^*，则称 A^* 是 A 的对偶式，或称 A^* 与 A 互为对偶式。

显然 $(A^*)^* = A$。

例 1　写出下列公式的对偶式。

(1) $(P \vee Q) \wedge R$。

(2) $(P \wedge Q) \vee T$。

(3) $\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg(Q \wedge \neg S))$。

解　上述公式的对偶式为

(1) $(P \wedge Q) \vee R$。

(2) $(P \vee Q) \wedge F$。

(3) $\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg(Q \vee \neg S))$。

2. 对偶原理

定理 1.7.1(对偶原理) 若公式 $A \Leftrightarrow B$,则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

对偶原理表明,利用公式的对偶式可以扩大等价式的数量,也可以简化证明。例如,$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ 与 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 这两个等价公式的两端互为对偶式,因而只需证明一个等价公式成立即可。

1.7.2 命题公式的范式

从前面的讨论可知,存在大量等价但表现形式互不相同的命题公式。那么,是否存在一个标准的或规范的形式使命题公式的表示是唯一的?回答是肯定的,就是将要在 1.7.3 介绍的命题公式的主范式,为此,先介绍范式的概念。

1. 析取式与合取式

定义 1.7.2 单个的命题变元及其否定形式称为文字,如 P,$\neg Q$ 等。

定义 1.7.3 有限个文字的析取称为析取式;有限个文字的合取称为合取式。

例如,$\neg P \vee Q$,$P \vee \neg Q \vee R$,$\neg P$,Q 等都是析取式;$P \wedge Q$,$\neg P \wedge Q \wedge R$,$\neg P$,Q 等都是合取式。这里一个文字既可看成析取式,又可看成合取式。

2. 析取范式与合取范式

定义 1.7.4 由有限个合取式组成的析取式称为析取范式;由有限个析取式组成的合取式称为合取范式。析取范式与合取范式统称为范式。

例如,$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$,$P \wedge Q$ 等是析取范式;$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$,$P \vee Q$ 等是合取范式。

一个文字既可以看成是析取范式,又可看成是合取范式。至于 $P \vee Q$,若把它看作合取式的析取,则它是析取范式;若把它看成是文字的析取,则它是合取范式。同理,$P \wedge \neg Q$,$P \wedge Q$ 等既是析取范式,又是合取范式。

定理 1.7.2(范式存在性定理) 任何一个命题公式都存在着与之等价的析取范式和合取范式。

证明略。

例 2 求 $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 的析取范式和合取范式。

解 $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee Q) \to R \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$(析取范式)

$\Leftrightarrow(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$(合取范式)

例 3 求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的析取范式。

解 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow(\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$(析取范式)

$\Leftrightarrow(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$(析取范式)

最后两个等价的公式都是原公式的析取范式,可见命题公式的析取范式不唯一。

例 4 求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的合取范式。

解 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg\neg(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow((P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee P) \wedge (P \vee Q \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg Q)$(合取范式)

$\Leftrightarrow(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$(合取范式)

最后两个等价的公式都是原公式的合取范式,命题公式的合取范式也不唯一。

3.范式的应用

利用范式判断命题公式类型(重言式,矛盾式和可满足式)的问题称为判定问题。

定理 1.7.3 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个合取式都是矛盾式;一个合取范式是重言式当且仅当它的每个析取式都是重言式。

例 5 判断下列公式的类型。

(1) $\neg(P \to Q) \wedge Q$。

(2) $P \vee (Q \to R) \vee \neg(P \vee R)$。

解 (1) $\neg(P \to Q) \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge Q$

由定理 1.7.3 可知,$\neg(P \to Q) \wedge Q$ 为矛盾式。

(2) $P \vee (Q \to R) \vee \neg(P \vee R) \Leftrightarrow P \vee \neg Q \vee R \vee (\neg P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee R \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q \vee R \vee$

$\neg R)$

由定理 1.7.3 可知，$P \vee (Q \rightarrow R) \vee \neg(P \vee R)$ 为重言式。

1.7.3 主析取范式和主合取范式

由于一个命题公式的范式不唯一，这就使得范式的应用受到了一定的限制，为了使任意命题公式化为某种唯一的表现形式，下面引入主范式的概念。

1. 主析取范式

定义 1.7.5 在含有 n 个命题变元的合取式中，若每个命题变元及其否定有且仅有一个出现，则称该合取式为小项。

例如，两个命题变元 P 和 Q 构成的小项有 4 个：$P \wedge Q, P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, \neg P \wedge \neg Q$。三个命题变元 P, Q 和 R 构成的小项有 8 个：$P \wedge Q \wedge R, P \wedge Q \wedge \neg R, P \wedge \neg Q \wedge R, P \wedge \neg Q \wedge \neg R, \neg P \wedge Q \wedge R, \neg P \wedge Q \wedge \neg R, \neg P \wedge \neg Q \wedge R, \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$。

一般说来，n 个命题变元共有 2^n 个小项。

小项的二进制编码表示：命题变元按字母顺序排列，命题变元与 1 对应，命题变元的否定与 0 对应，得到的编码称为小项二进制编码，记为 m_i，其下标 i 是由二进制编码转化的十进制数。n 个命题变元形成的 2^n 个小项，分别记为：$m_0, m_1, \cdots, m_{2^n-1}$。有时下标也直接用二进制编码表示。

表 1-12 列出了两个命题变元 P 和 Q 生成的 4 个小项的真值表及编码表示。

表 1-12 两个命题变元 P 和 Q 生成的 4 个小项的真值表及编码表示

m(二进制)		m_{00}	m_{01}	m_{10}	m_{11}
P	Q	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge Q$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1
m(十进制)		m_0	m_1	m_2	m_3

从这个真值表中可以看到，任意两个小项都不等价。

这个结论可以推广到 3 个及 3 个以上变元的情况。

由真值表可得到小项具有如下性质：

(1) 各个小项的真值表都不相同。

(2) 每个小项当其真值指派与对应的二进制编码相同时，其真值为真，其余的 2^n-1 种指派，其真值均为假。

(3) 任意两个小项的合取式是矛盾式。例如 $m_{00} \wedge m_{10} = (\neg P \wedge \neg Q) \wedge (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg Q \Leftrightarrow F$

(4) 全体小项的析取式为永真式。

定义 1.7.6　由若干个不同的小项组成的析取式称为主析取范式。与公式 A 等价的主析取范式称为 A 的主析取范式。

定理 1.7.4　任意含 n 个命题变元的非永假式命题公式都存在与之等价的主析取范式，且其主析取范式是唯一的。

证明略。

求命题公式的主析取范式有两种方法，一是真值表法，另一是等值演算法。

(1) 真值表法

定理 1.7.5　在真值表中，命题公式 A 的真值为真的赋值所对应的小项的析取即为命题公式 A 的主析取范式。

利用真值表法求主析取范式的基本步骤为：

1) 列出公式的真值表。

2) 将真值表中公式的真值为 1 对应的所有小项进行析取，即得该公式的主析取范式。

例 6　利用真值表法求 $\neg(P \wedge Q)$ 的主析取范式。

解　$\neg(P \wedge Q)$ 的真值表见表 1-13。

表 1-13　$\neg(P \wedge Q)$ 的真值表

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

从表 1-13 中可以看出，该公式在其真值表的 00 行，01 行，10 行处取真值 1，所以

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$。

例 7　用真值表法求$(P \wedge Q) \vee R$的主析取范式。

解　$(P \wedge Q) \vee R$的真值表见表 1-14。

表 1-14　$(P \wedge Q) \vee R$的真值表

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

从表 1-14 中可以看出，该公式在其真值表的 001 行，011 行，101 行，110 行和 111 行处取真值 1，所以$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$。

例 8　设公式 A 的真值表如表 1-15，求公式 A 的主析取范式。

解：由真值表可看出公式 A 有 3 组成真赋值，分别出现在 000 行，100 行和 111 行，所以公式 A 的主析取范式为

$$A \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

表 1-15　公式 A 的真值表

P	Q	R	A
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(2) 等值演算法

用公式的等值演算方法来推导,即等值演算法,其步骤如下:

1) 求公式 A 的析取范式 A';

2) 除去 A' 中所有永假的析取项;

3) 若 A' 的某个合取式 B 中不含有某个命题变元 P,也不含 $\neg P$,则将 B 展成形式 $B \Leftrightarrow B \wedge T \Leftrightarrow B \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow (B \wedge P) \vee (B \wedge \neg P)$;

4) 将重复出现的命题变元、矛盾式项及重复出现的小项都消去;

5) 将小项按顺序排列。

例 9　求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式。

解　$(P \to Q) \wedge Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge Q \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$

例 10　求 $(P \to Q) \leftrightarrow R$ 的主析取范式。

解　$(P \to Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \to R) \wedge (R \to (\neg P \vee Q))$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)) \vee (R \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg P) \vee$
$(R \wedge Q) \vee (R \wedge \neg R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$
$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

2. 主合取范式

定义 1.7.7　在含有 n 个命题变元的析取式中,若每个命题变元及其否定有且仅有一个出现,则称该析取式为大项。

例如,两个命题变元 P 和 Q 构成的大项有 4 个:$P \vee Q$,$P \vee \neg Q$,$\neg P \vee Q$,$\neg P$

$\vee \neg Q$。3 个命题变元 P,Q 和 R 构成的大项有 8 个：$P \vee Q \vee R, P \vee Q \vee \neg R, P \vee \neg Q \vee R, P \vee \neg Q \vee \neg R, \neg P \vee Q \vee R, \neg P \vee Q \vee \neg R, \neg P \vee \neg Q \vee R, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$。

一般说来，n 个命题变元共有 2^n 个大项。

大项的二进制编码为：命题变元按字母顺序排列，命题变元与 0 对应，命题变元的否定与 1 对应，则得到大项的二进制编码，记为 M_i，其下标 i 是由二进制编码转化的十进制数。n 个命题变元形成的 2^n 个大项，分别记为：$M_0, M_1, \cdots, M_{2^n-1}$。有时下标也直接用二进制编码表示。

表 1-16 列出了两个命题变元 P 和 Q 生成的 4 个大项的真值表及编码表示。

表 1-16　两个命题变元 P 和 Q 生成的 4 个大项的真值表及编码表示

M(二进制)		M_{00}	M_{01}	M_{10}	M_{11}
P	Q	$P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0
M(十进制)		M_0	M_1	M_2	M_3

从这个真值表中可以看到，任意两个大项都不等价。

这个结论可以推广到 3 个及 3 个以上变元的情况。

由真值表可得到大项具有如下性质：

1）各大项的真值表都不相同。

2）每个大项当其真值指派与对应的二进制编码相同时，其真值为假，其余 2^n-1 种指派的真值均为真。

3）任意两个不同大项的析取式是永真式。例如 $M_{00} \vee M_{10} = (P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \vee \neg P \vee Q \Leftrightarrow T$。

4）全体大项的合取式必为永假式。

定义 1.7.8　由若干个不同的大项组成的合取式称为主合取范式。与公式 A 等价的主合取范式称为 A 的主合取范式。

定理 1.7.6　任意含 n 个命题变元的非永真式命题公式都存在与之等价的主合取范式，并且其主合取范式是唯一的。

与主析取范式的求解方法相类似，求主合取范式也有真值表法和等值演算法两种方法。

（1）真值表法

定理 1.7.7　在真值表中，命题公式 A 的真值为假的赋值所对应的大项的合取即为命题公式 A 的主合取范式。

利用真值表法求主合取范式的基本步骤为：

1）列出公式的真值表。

2）将真值表中公式的真值为 0 对应的所有大项进行合取，即得该公式的主合取范式。

例 11　求 $(P \rightarrow Q) \wedge Q$ 的主合取范式。

解　$(P \rightarrow Q) \wedge Q$ 的真值表见表 1-17。

表 1-17　$(P \rightarrow Q) \wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge Q$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

从上表可看出，公式 $(P \rightarrow Q) \wedge Q$ 在 00 行和 10 行处取真值 0，所以 $(P \rightarrow Q) \wedge Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2$。

（2）等值演算法

具体的求解步骤如下：

1）求公式 A 的合取范式 A'；

2）除去 A' 中所有永真的合取项；

3）若 A' 的某个简单析取式 B 中不含有某个命题变元 P，也不含 $\neg P$，则将 B 展成形式 $B \Leftrightarrow B \vee F \Leftrightarrow B \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow (B \vee P) \wedge (B \vee \neg P)$；

4）将重复出现的命题变元、永真式项及重复出现的大项都消去；

5）将大项按顺序排列。

例 12　求 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 的主合取范式。

解　$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

$\Leftrightarrow((P \wedge Q) \vee \neg P) \wedge ((P \wedge Q) \vee R)$

$\Leftrightarrow(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

$\Leftrightarrow((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

$= M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5$

3.主析取范式和主合取范式的关系

由命题公式 A 的主析取范式可求得其主合取范式,反之亦然。

事实上,注意到小项 m_i 与大项 M_i 满足 $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$,$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$。

例如,m_5:$P \wedge \neg Q \wedge R$,M_5:$\neg P \vee Q \vee \neg R$。

在含有 n 个命题变元的命题公式 A 中,如果 A 的主析取范式中含有 k 个小项 m_{j_1},m_{j_2},…,m_{j_k},则 $\neg A$ 的主析取范式中必含 2^n-k 个小项 m_{i_1},m_{i_2},…,$m_{i_{2^n-k}}$,即

$$\neg A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_{2^n-k}}$$

$$A \Leftrightarrow \neg(m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_{2^n-k}})$$

$$\Leftrightarrow \neg m_{i_1} \wedge \neg m_{i_2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{i_{2^n-k}}$$

$$\Leftrightarrow M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{i_{2^n-k}}$$

则 A 的主合取范式中含有 2^n-k 个大项,且 A 的主合取范式为 $M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{i_{2^n-k}}$。因此,根据公式的主析(合)取范式可以写出相应的主合(析)取范式。

如例 12 中的主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5$ 已求出,则主析取范式为 $m_1 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$,然后写出相应的小项即可。

例 13 求 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \rightarrow R)$ 的主析取范式与主合取范式。

解 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \rightarrow R)$

$\Leftrightarrow(\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \rightarrow R)) \wedge (\neg(\neg P \rightarrow R) \rightarrow \neg(P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow((P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \rightarrow R)) \wedge ((\neg P \rightarrow R) \vee \neg(P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)) \wedge ((P \vee R) \vee (\neg P \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow(P \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg R)$