

目 录

第一章 绪 论	(1)
第一节 运筹学的起源	(1)
第二节 运筹学的性质与特点	(2)
第三节 运筹学的学科分支	(3)
第四节 运筹学研究和解决问题的基本方法	(5)
第二章 线性规划	(7)
第一节 线性规划问题及其数学模型	(7)
第二节 两个变量的线性规划问题的图解法	(10)
第三节 线性规划问题的标准形式	(14)
第四节 标准形线性规划的解的概念	(16)
第五节 单纯形法	(18)
第六节 单纯形法的进一步讨论——人工变量法	(31)
第七节 线性规划的应用举例	(33)
第三章 对偶规划与灵敏度分析	(41)
第一节 对偶线性规划	(41)
第二节 对偶定理	(45)
第三节 对偶问题的经济解释—影子价格	(49)
第四节 对偶单纯形法	(55)
第五节 灵敏度分析	(59)
第四章 运输问题	(79)
第一节 运输问题的模型与性质	(79)
第二节 用表上作业法求解运输问题	(82)
第三节 运输问题的进一步讨论	(89)
第五章 整数规划	(97)
第一节 整数规划的数学模型及解的特点	(97)
第二节 解纯整数规划的割平面法	(100)
第三节 分枝定界法	(105)
第四节 0—1 型整数规划	(108)



第五节 指派问题	(110)
第六章 非线性规划	(114)
第一节 非线性规划的数学模型和基本概念	(114)
第二节 最优性条件	(118)
第三节 无约束问题的优化方法	(121)
第七章 动态规划	(129)
第一节 动态规划问题的基本概念	(129)
第二节 动态规划的原理、方程以及特点	(131)
第三节 动态规划的模型建立与求解	(134)
第八章 图与网络分析	(144)
第一节 图与网络的基本概念	(144)
第二节 树与最小生成树	(153)
第三节 最短路径问题	(163)
第四节 最大流问题	(170)
第五节 最小费用最大流问题	(176)
第九章 决策论	(184)
第一节 决策论的基本概念	(184)
第二节 不确定性决策	(187)
第三节 风险型决策	(191)
第四节 灵敏度分析	(194)
第五节 多目标决策	(196)
第十章 对策论	(199)
第一节 对策论的概念	(199)
第二节 策略矩阵对策	(201)
第三节 混合策略矩阵对策	(204)
第四节 矩阵对策的求解方法	(207)
第十一章 存储理论	(216)
第一节 存储理论模型的基本概念	(216)
第二节 确定型库存模型	(219)
第三节 随机型存储模型	(227)
参考文献	(234)



第一章 绪 论



第一节 运筹学的起源

运筹学一词起源于 20 世纪 30 年代。据《大英百科全书》释义,“运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学”,“运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具”。我国《辞海》中有关运筹学条目的释义为:“运筹学主要研究经济活动与军事活动中能用数量来表达有关运用、筹划与管理方面的问题。它根据问题的要求,通过数学的分析与运算,做出综合性的合理安排,以达到较经济较有效地使用人力物力”。运筹学一词的英文原名,美国英语 Operations Research,英国英语 Operational Research(缩写为 O. R.),可直译为“运用研究”或“作业研究”。1957 年我国从“夫运筹于帷幄之中,决胜于千里之外”这句古语中摘取“运筹”二字,将 O. R. 正式译作运筹学,比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵。由于运筹学涉及的主要领域是管理问题,研究的基本手段是建立数学模型,并且比较多地运用各种数学工具,从这点出发,曾有人将运筹学称作“管理数学”。

- 早期的工作举例:

1914,英国,Lanchester,军事:战斗方程;

1917,丹麦,Erlang,通讯;

1939,前苏联,Канторович,经济:生产组织与计划;

中国:战国,孙臬,赛马策略;

宋朝,丁谓,宫室重建方案;

宋朝,沈括,征西夏,后勤保障;

明朝,修建宫室,运送巨石。

- 二战期间:军事运筹学:

雷达空防系统的有效运用,深水炸弹的起爆效用研究,商船护航舰队编队问题,野外火炮效能的最佳利用,稀有军事资源的分配。

- 战后:除军事上的应用研究之外,在经济和社会的很多方面都有广泛的发展与应用。

- 运筹学发展的三个阶段:

1. 创建时期(1945—50 年代初)

1947:提出求解线性规划问题的重要方法:单纯形法;



1950:英,伯明翰大学,第一次开设运筹学课程;

1950:《运筹学季刊》(英);第一本杂志;

1951:《运筹学方法》(Morse, Kimball);第一本专著;

1952:美国运筹学会成立;第一个学会。

2. 成长时期(50年代初—50年代末)

计算机的发展与运筹方法相结合,用来解决实际管理、经济中的问题;

1959:国际运筹学联合会(IFORS)成立。

3. 普及和迅速发展时期(60年代以来)

运筹学进一步细化为各个分支,大量的专业学术团体、期刊、书籍、教学课程,在一些大规模的复杂问题或系统中得到应用。

• 运筹学在中国:

1956:第一个运筹学小组,中科院力学所;

1960,62,78:全国运筹学会议;

1980:中国运筹学会成立;

1982:加入 IFORS;

重要工作:图上作业法、投入产出、优选法、中国邮路问题等。

20 世纪 50 年代中期,著名数学家华罗庚等老一辈科学家的贡献最为突出。20 世纪六七十年代,华罗庚的“优选法”和“统筹法”被许多部门采用,取得很好的经济效益,受到中央领导的好评。改革开放以来,运筹学的应用更为普遍,例如,运用线性规划进行全国范围的粮食、钢材的合理调运和广东省内水泥的合理调运等,同时简单易行的“图上作业法”也发挥了作用。运筹学方法在企业管理中的应用取得了明显的经济效益,提高了企业的管理水平,受到企业决策层和主管部门的重视。



第二节 运筹学的性质与特点

运筹学是一门应用范围广泛的科学,它广泛的应用现有的科学技术知识和数学方法来解决实际问题。运筹学研究的对象主要是经济、军事以及科学技术等活动中,能用数量关系来描述的有关决策、筹划与管理等方面的问题。

由于运筹学具有广泛的应用性,为了有效的应用运筹学,有人提出了以下 6 条原则:

- (1)合作原则:运筹学工作要和各方面的人士,尤其是同实际部门工作者合作。
- (2)催化原则:在多学科共同解决某问题时,要引导人们改变一些常规的看法。
- (3)互相渗透原则:要求多部门彼此渗透的考虑问题,而不是只局限于本部门。
- (4)独立原则:在研究问题时,不应受某人或某部门的特殊政策所左右,应独立工作。
- (5)宽容原则:解决问题的思路要宽,方法要多,而不是局限于某种特定的方法。



(6)平衡原则:要考虑各种矛盾的平衡、关系的平衡。

总之,应用运筹学要集思广益,取长补短,灵活运用,积极进取。运筹学在研究问题方面有以下特点。

(1)运筹学借助于模型,用定量分析或定量与定性分析相结合的方法,合理的解决实际问题,广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等研究组织内的统筹协调问题,故其应用不受行业和部门的限制。

(2)运筹学是多学科专家集体协作研究的结晶。运筹学即对各种经营活动进行创造性的科学研究,又涉及组织的实际管理问题,具有很强的实践性,最终能向决策者提供建设性意见,并收到实效。

(3)运筹学以“整体最优”为目标,从系统的观点出发,力图以整个系统最佳的方式来解决该系统各部门之间的利害冲突;对所研究的问题求出最优解和最佳解的行动方案,所以它也常被人看成是一门优化技术,它提供的是解决各类问题的优化方法。

(4)电子计算机室不可缺少的工具。计算机的发展使许多运筹学方法得以实现和发展。目前已有不少可以求解运筹学各种问题的成熟软件,如 MATLAB、QSB、LINDO、LINGO 等。



第三节 运筹学的学科分支

随着科学技术和生产的发展,运筹学已渗入很多领域,本身也在不断发展,现在已经是一个包括众多分支的数学学科,如:数学规划(含线性规划,非线性规划,整数规划,动态规划和组合规划等)、图论、网络流、决策分析、排队论、可靠性数学、库存论、对策论、搜索论、模型论等。数学规划是运筹学的一个重要分支,研究对象是计划管理工作中有关安排和估值的问题,解决的主要问题是给定条件下,按某一衡量指标来寻找安排的最优方案,通常可以表示为求函数在满足约束条件下的极值问题。数学规划和古典的求极值问题有本质上的不同,古典方法只能处理具有简单表达式和简单约束条件的情况。而现代的数学规划中的目标函数和约束条件都很复杂,而且要求给出某种精确度的数字解答,因此算法的研究特别受到重视。

数学规划含众多分支,如线性规划、非线性规划、多目标规划、动态规划、随机规划、组合规划和整数规划及参数规划等。线性规划是约束条件和目标函数都呈线性关系的规划问题。线性规划单纯形解法的出现,对运筹学的发展起了重大的推动作用。许多实际问题都可以化成线性规划来解决,而单纯形法是一个行之有效的算法,加上计算机的出现,使一些大型复杂的实际问题得到解决。非线性规划是线性规划的进一步继续和发展。许多实际问题如设计问题、经济平衡问题都属于非线性规划的范畴。非线性规划扩大了数学规划的应用范围,同时也给数学工作者提出了许多基本理论问题,使数学中的如凸分析、数值分析等也得到了发展。动态规划是和时间有关的规划问题。近年来在工程控制、技术物理和通讯的最佳控制问题中,已经成为经常使用的重要工具。



排队论, 又称随机服务系统理论, 是通过对服务对象到来及服务时间的统计研究, 得出这些数量指标(等待时间、排队长度、忙期长短等)的统计规律, 然后根据这些规律来改进服务系统的结构或重新组织被服务对象, 使得服务系统既能满足服务对象的需要, 又能使机构的费用最经济或某些指标最优, 既是运筹学的分支学科, 也是研究服务系统中排队现象随机规律的学科, 广泛应用于计算机网络、生产、运输、库存等各项资源共享的随机服务系统中。排队论由以下三部分组成: ①输入过程, 即顾客到达的规律。比如有定长输入、泊松输入、埃尔朗输入、独立输入等。②排队规则。如有损失制、等待制、混合制等。③服务机构。包括服务台设置、服务方式及服务时间等。排队论研究的内容有三个方面: 统计推断, 根据资料建立模型; 系统的性态, 即和排队有关的数量指标的概率规律性; 系统的优化问题, 目的是正确设计和有效运行各个服务系统, 使之发挥最佳效益。评价一个排队系统的好坏要以顾客与服务机构两方面的利益为标准。就顾客来说总希望等待时间或逗留时间越短越好, 从而希望服务台个数尽可能多些, 但是, 就服务机构来说, 增加服务台数, 就意味着增加投资, 增加多了会造成浪费, 增加少了要引起顾客的抱怨甚至失去顾客, 增加多少比较好呢? 顾客与服务机构为了照顾自己的利益对排队系统中的三个指标: 队长、等待时间、服务台的忙期(简称忙期)进行优化, 成了排队论的主要研究内容。排队论应用广泛, 适用于一切服务系统, 尤其在通信系统、交通系统、计算机、存贮系统、生产管理系统等方面应用最多。

对策论也叫博弈论, 最早是从国际象棋如何确定取胜的着法开始的。由于是研究双方冲突、制胜对策的问题, 所以这门学科在军事方面有着十分重要的应用。近年来, 数学家还对水雷和舰艇、歼击机和轰炸机之间的作战、追踪等问题进行了研究, 提出了追逃双方都能自主决策的数学理论, 并随着人工智能研究的进一步发展对博弈论提出了更多新的要求。

搜索论是由于第二次世界大战中作战的需要而出现的运筹学分支, 研究在资源和探测手段受到限制的情况下, 如何设计寻找某种目标的方案, 并加以实施的理论和方法。

图论是一个古老的但又十分活跃的分支, 网络技术的基础。它将复杂庞大的工程系统和管理问题用图进行描述, 可以解决很多工程设计和决策的最优化问题, 例如, 完成工程任务的时间最少, 距离最短, 费用最省等。

可靠性数学是研究系统故障、以提高系统可靠性问题的理论, 研究的系统一般分为两类: (1)不可修复系统: 如导弹, 这种系统的参数是寿命、可靠度等, (2)可修复系统: 如一般的机电设备等, 这种系统的重要参数是有效度, 其值为系统的正常工作时间与正常工作时间加上事故修理时间之比。

决策论是研究决策中的数学问题。所谓决策就是根据客观可能性, 借助一定的理论、方法和工具, 科学地选择最优方案的过程。决策问题是由决策者和决策域构成的, 而决策域又由决策空间、状态空间和结果函数构成。研究决策理论与方法的科学就是决策科学。决策所要解决的问题是多种多样的, 从不同角度有不同的分类方法, 按决策者所面临的自然状态的确定与否可分为: 确定型决策、风险型决策和不确定型决策; 按决策所依据的目标个数可分为: 单目标决策与多目标决策; 按决策问题的性质可分为: 战略决策与策略决策, 以及按不同准则划分成的种



种决策问题。不同类型的决策问题应采用不同的决策方法。

第四节 运筹学研究解决问题的基本方法

运筹学的研究方法有:1.从现实生活场合抽出本质的要素来构造数学模型,因而可寻求一个跟决策者的目标有关的解;2.探索求解的结构并导出系统的求解过程;3.从可行方案中寻求系统的最优解法比较早期且比较完整介绍运筹学方法论的是丘奇曼、阿可夫和阿努夫在1957年出版的《运筹学导论》一书。其他的书有的略有增改,大意相同,这里主要介绍丘奇曼等介绍的6步:①形成问题;②构造模型;③模型求解;④解的检验;⑤解的控制;⑥解的实施。只是后来有不少运筹学家把研究精力放在构造模型和模型求解方面,以至于离开解决实际问题越来越远。

1. 形成问题

从研究对象中找出要解决的问题是能正确解决问题的第一步。第二次世界大战中,为了保护商船不被敌机炸掉,就提出了一些措施,有人提出在商船上装上高炮来攻击敌机,然而商船毕竟不是兵舰,因此高炮击中敌机的命中率只有4%,远不如装在兵舰或者陆地上命中率高,于是,另外一些人就反对在商船上装高炮。但是有人提出装高炮本来不是为了用来打飞机,而是为了用来保护商船,于是就去比较装与不装高炮后商船被敌机击沉率分别为10%和25%,结果发现装高炮后商船被敌机击中率大大降低,问题也就迎刃而解。要正确解决问题一般要弄清问题症状,搞清目标、约束条件和用户的一些需求。另外,有时问题太大也需要将之分解成若干子问题,加以区别轻重,并分别的加以解决或者暂时不予解决。

2. 造型模型

由于实际问题往往开始只有定性的描述,而且主次难分,为了得到定量的解决,在运筹学中经常要建立各种定量和定性模型,当然以定量模型为主。从数学上来分,模型有决定性的和随机性的,有连续的和离散的,有线性的和非线性的,有静态的和动态的,有解析的和数学模拟的,还有不带竞争的和带竞争的模型。另外,还有用运筹学分支学科命名的模型,如线性规划模型,非线性规划模型,网络模型,模糊数学模型和投入产出模型等;以应用对象来命名的模型,如经济模型,能源模型,生态模型,运输模型,存储模型,区域规划模型等。在形成任何模型时,除了要考虑问题本身的特征以外,有时还要考虑有没有求解的方法及数据的可获得性。运筹学工作者的一个重要本领就是根据问题的性质去选择以至创造出合适的模型。

3. 模型求解

不同的模型需要用不同的解法,如资源分配问题往往用线性规划模型来描述,而线性规划一般用单纯性法来求解,而工厂选址问题往往用混合整数规划去求解。例如,我们在解决一个天津市××行业调整的问题时,开始就化成一个有3000个连续变量和15个整数变量的混合整数规划,可是在当时(20世纪80年代)我们有一个石油部门的计算中心计算时,如果不考虑一



定要用整数解而只用一般线性规划时,只用 10 分钟就出了结果(不过解不是整数的),当时机时费 200 元。而用真正的混合整数规划去解(当时分枝定界法),结果花了 5000 元半天的时间最终结果仍未出来,最后只好停机了事,采用适当的取整的方法来定解。当然,现在随计算机性能的大大提高,先进的算法不断出现(如线性规划有了内点法,速度比单纯形法要快很多倍),更重要的是许多运筹学方法的软件包的出现,使一般中、小规模问题在一般计算机上都可解决。

4. 解的检验

由于模型毕竟不是现实本身,而只是现实的一个简化的抽象,同时由于算法的程序和数据的问题,得到的解不一定对和好用,这就需要验证和实验。前者主要是算法、程序和数据,以至使用的计算机本身是否能解决实际问题,一般要靠用户配合。

5. 解的控制

要保证有高度精度的解的使用,其实还有一个解的控制问题。有时用户希望找到的最优解有一个较宽的范围,这样反而好控制。例如,有一个为工厂找最佳温度的优选法实验,当找到最优解时,控制温度的工人希望除了告诉他们最优解外,还希望有一个较宽的带,以便实际控制。因此,有时做一下解的灵敏度分析对解的控制是有用的。

6. 解的实施

由于模型毕竟只反映问题的主要方面,因此用它求出的解不可能被实际部门全部照搬,有时解要修改。例如,我们为一个农业研究部门寻找猪饲料的最佳配方,当我们按照他们提供的各种饲料的营养成分和价格等基本数据,在满足各种营养的需求下,求最低成本的饲料组合的构思时,用线性规划方法很快找到了最优解,并将此解提供给用户,谁知用户竟要求我们把次优解和次次优解也给他们。我们问他们为什么不直接用最优解,他们的回答是就是不知道猪爱不爱吃。多几个优解好多几个选择。另外一个值得注意的是训练与教育问题,好的东西还要有好的教育配合。20 世纪 70 年代,我们曾经应国家计委要求推广应用合理下料以节省原材料,同事们采用了整数规划的合理下料模型,应用了 Gomory 的算法,编制了程序,也到北京一个汽车厂去试了点,他们用整张钢板为汽车门的部件下料,由于他们采用的是单一下材料法,简单而不省料,而我们用运筹学方法——混合优化下料确实省了材料——钢板。但是后来据说车间没有采用,他们有两个理由:一个是混合下料增加了下料工加工时的难度和强度;另一个理由却是我们无法想到,那就是以前的下料法,去掉的边角料正好是他们附属家属灯具厂的原料,而采用优化方法后边角料太小,对大厂讲是省了,对小厂讲却废物不能利用了,反而要去买整张的钢板了,最后只好不了了之。这里也反映了要使解能顺利实施必须及早与用户沟通,听取他们的意见和及早让他们了解我们运筹学工作者的意图。



第二章 线性规划

线性规划是运筹学中研究较早、理论和算法比较成熟的一个重要分支. 它主要研究在一定的线性约束条件下, 使得某个线性指标最优的问题. 我们在工农业生产、交通运输、军事等各领域都会遇到这类问题, 因此, 线性规划也是运筹学中应用最广的分支之一。



第一节 线性规划问题及其数学模型

一、线性规划的简单例子和模型

在生产管理的经营活动中, 通常需要对“有限的资源”寻求“最佳”的利用或分配方式。

1. 有限的资源: 劳动力、原材料、设备或资金等。
2. 最佳: 有一个标准或目标, 使利润达到最大或成本达到最小。

有限资源的合理配置有两类问题:

3. 如何合理的使用有限的资源, 使生产经营的效益达到最大;
4. 在生产或经营的任务确定的条件下, 合理的组织生产, 使所消耗的资源数最少。

与规划问题有关的数学模型总有两部分组成:

5. 约束条件: 反应了有限资源对生产经营活动的种种约束, 或者生产经营必须完成的任务;
6. 目标函数: 反映生产经营者在有限资源条件下希望达到的生产或经营的目标。

实际的线性规划问题一般都很复杂, 为了便于读者掌握建立线性规划模型的方法, 我们在这里所选的例子都经过了较大的减化. 只要弄懂了这些简单的模型今后遇到较为复杂的问题也就能触类旁通、举一反三了。

例 2-1 某工厂利用甲、乙、丙三种原料, 生产 A, B, C, D 四种产品. 每月可供应该厂原料甲 500 吨、乙 300 吨、丙 200 吨。生产 1 吨不同产品可获得的利润以及生产 1 吨不同产品所消耗的原料数量见表 2-1。

表 2-1

消耗 原料	产品					每月原料供应量(吨)
		A	B	C	D	
	甲	1	1	2	2	500
	乙	0	1	1	3	300
	丙	1	2	1	0	200
	利润(元/吨)	200	250	300	150	



问工厂每月应如何安排生产计划,使总利润最大?

解:为了用数学形式表达这一问题,设该厂每月应生产 x_1 吨产品 A, x_2 吨产品 B, x_3 吨产品 C, x_4 吨产品 D。

生产这四种产品所消耗原料甲的总数量就是(吨),但原料甲每月只能供应 500 吨,因此应有

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 500$$

类似地,我们还可以得到

$$x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 200$$

各种产品的数量不应该是负数,因此还应该

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

生产 x_1 吨产品 A, x_2 吨产品 B, x_3 吨产品 C, x_4 吨产品 D 所获得的总利润是

$$f = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 150x_4$$

我们要求 f 的最大值。

综合起来,可以把这个问题的数学形式写成

$$\begin{aligned} \text{求} \quad & \max f = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 150x_4 & (2-1) \\ \text{s. t. (满足)} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 500 & (2-2) \\ x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300 & (2-3) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 200 & (2-4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 & (2-5) \end{cases} \end{aligned}$$

式中,记号“ $\max f$ ”表示函数 f 的最大值。 $f = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 150x_4$ 称为目标函数;式(2-2)、(2-3)、(2-4)、(2-5)称为约束条件。满足约束条件(2-2)、(2-3)、(2-4)、(2-5)的一组 x_1, x_2, x_3, x_4 的值称为此问题的可行解,使目标函数 f 达到最大值的可行解称为最优解。从制定生产计划的角度来看,可行解就是一个生产安排的方案,最优解就是一个最好的生产安排方案。式(2-1)、(2-2)、(2-3)、(2-4)、(2-5)就是一个线性规划问题。

例 2-2 东风电视机公司接到上海一家商场(记为 B_1)、青岛一家商场(记为 B_2)和西安一家商场(记为 B_3)订单各一份,要求下月给各商场供应一些电视机(某种规格型号的,下同)。三家商场 B_1, B_2 和 B_3 对电视机的需求量分别为 100 台、80 台和 90 台。该公司决定,由它设在北京和武汉的两个仓库 A_1 和 A_2 来供应上述各家商场的电视机。预计下月和可供应的电视机数量分别为 200 台和 150 台。又已知每个仓库运送 1 台电视机到每家商场的运费如表 2-2 所示。现问该公司应如何调运电视机(每个仓库向每个商场运送多少台电视机),才能既满足各商场的需要,又能使总的运费最少?

表 2-2

	B_1	B_2	B_3
A_1	15	21	18
A_2	20	25	16



解:此例中提出的经营管理问题是,如何合理组织调运,才能使总的运费最少.具体的决策问题是,每个仓库应该调给每个商场多少台电视机.

设 x_{11}, x_{12} 和分别表示从仓库 A_1 调给三家商场 B_1, B_2 和 B_3 的电视机数量,以台为单位, x_{21}, x_{22} 和 x_{23} 分别表示从仓库 A_2 调给三家商场 B_1, B_2 和 B_3 的电视机数量.这些 x_{ij} 称为调运量,简称运量.在实际问题中,运费与运量的关系往往比较复杂,为简单起见,在运输问题中我们总假定:

运费单价 $\times$ 运量.

于是,总的运费为

$$15x_{11} + 21x_{12} + 18x_{13} + 20x_{21} + 25x_{22} + 16x_{23}.$$

显然,各个 x_{ij} 越小,总的运输费用越少.但是,这些 x_{ij} 是受到一定限制的.首先,每个仓库供应给各家商场的电视机数量不能超过它自己的拥有量.比如仓库 A_1 ,它供应给三家商场 B_1, B_2 和 B_3 的电视机数量分别为 x_{11} 台、 x_{12} 台和 x_{13} 台,它自己的拥有量为 200 台.那么应有

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 200.$$

同样,对仓库,有

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150.$$

其次,各家商场对电视机的需求应得到满足.比如对商场 B_1 ,它需要电视机 100 台.这些电视机由两个仓库 A_1 和 A_2 负责供应.因为已设 A_1 供应 x_{11} 台, A_2 供应 x_{21} 台,故应有

$$x_{11} + x_{21} \geq 100.$$

同样,为了满足商场 B_2 的需求,应有

$$x_{12} + x_{22} \geq 80.$$

对于商场 B_3 也有不等式

$$x_{13} + x_{23} \geq 90.$$

最后,所有调运量(即各个 x_{ij}) 都不能取负值.

总结以上分析,可得这一运输问题的数学模型如下:(以 f 表示总的运输费用)

$$\min f = 15x_{11} + 21x_{12} + 18x_{13} + 20x_{21} + 25x_{22} + 16x_{23}.$$

$$s. t. \left(\text{满足} \right) \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150 \\ x_{11} + x_{21} \geq 100 \\ x_{12} + x_{22} \geq 80 \\ x_{13} + x_{23} \geq 90 \\ x_{ij} \geq 0 (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

其中“ $\min$ ” f 表示函数 f 的最小值.严格来说, x_{ij} 还应该取整数值,这一点我们暂不考虑.

一般地讲,如果我们要求出一组变量的值,使之满足一组约束条件,这组约束条件只含有线性不等式或线性方程,同时这组变量的值使某个线性的目标函数取得最优值(最大值或最小值),这样的数学问题就是线性规划问题.



二、线性规划问题的一般模型

1. 线性规划模型的特征:

- (1) 用一组决策变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 表示某一方案, 且在一般情况下, 变量的取值是非负的.
- (2) 有一个目标函数, 这个目标函数可表示为这组变量的线性函数.
- (3) 存在若干个约束条件, 约束条件用决策变量的线性等式或线性不等式来表达.
- (4) 要求目标函数实现极大化(max)或极小化(min).

满足上述 4 个特征的规划问题称为线性规划问题.

2. 具有 n 个变量的线性规划问题的数学模型的一般形式为

目标函数 $\min f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ (或 $\max f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$)

$$\text{满足约束条件} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

利用求和记号“ Σ ”, 我们也可以把一般的线性规划问题记为:

$$\text{求 } \min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ (或 } \max f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \text{)} \quad (2-6)$$

$$\text{满足} \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i, i = 1, 2, \dots, m & (2-7) \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n & (2-8) \end{cases}$$

满足约束条件(2-7)、(2-8)的一组 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的值称为此线性规划问题的可行解. 使目标函数 f 达到最优值的可行解称为线性规划问题的最优解.

线性规划问题是描述实际问题的抽象的数学形式, 它反映了实际问题中数量之间的关系. 但是要把一个实际问题用数学形式(或模型)表示出来是比较复杂的, 因为首先要了解该实际问题的经济背景, 掌握较准确的数据, 确定影响该问题的主要因素及我们想达到的目标, 然后设计出若干变量, 并列约束条件和目标函数. 如果所得到的数学模型具有(2-6)、(2-7)、(2-8)所示的形式, 这才是线性规划问题.



第二节 两个变量的线性规划问题的图解法

例 2-3 用图解法求解线性规划问题

$$\max f = 5x_1 + 4x_2$$



$$s. t. (\text{满足}) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解:把 x_1 和 x_2 看成平面上点的坐标(如图 2-1),则满足一个约束不等式的所有的点(x_1, x_2) 就形成一个半平面. 例如,为了确定 $2x_1 + x_2 \leq 5$ 所表示的半平面,可以先在坐标平面上画出直线 $2x_1 + x_2 = 5$,再任取不在该直线上的一点,如取原点(0,0),将 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 带入不等式 $2x_1 + x_2 \leq 5$ 的左边,显然可以使这个不等式成立. 那么 $2x_1 + x_2 \leq 5$ 就表示以 $2x_1 + x_2 = 5$ 为边界,原点(0,0) 所在的那半个平面.

在此例中共有五个约束不等式,所以五个半平面的公共部分中的点的坐标(x_1, x_2) 就是此线性规划问题的可行解. 利用上面所介绍的方法,我们可以求出这一公共部分(见图 2-1),并将它称为线性规划问题的可行解区域(图中的阴影部分).

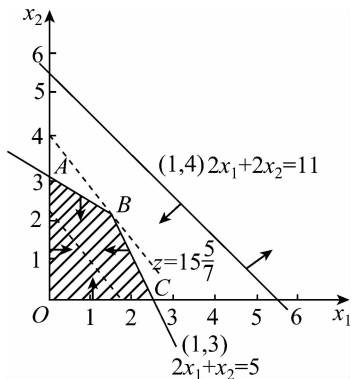


图 2-1

在此例中共有五个约束不等式,所以五个半平面的公共部分中的点的坐标就是此线性规划问题的可行解. 利用上面所介绍的方法,我们可以求出这一公共部分(见图 2-1),并将它称为线性规划问题的可行解区域(图中的阴影部分). 为了求出此线性规划问题的最优解,即找出使目标函数 f 取最大值的点. 显然当 f 取定某一常数 m 时,等式 $5x_1 + 4x_2 = m$ 代表一直线,其上所有点的目标函数值都相同,都为 m ,我们将这样的直线称为等值线(或等高线). 将上式改写为

$$x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{4}m.$$

当 m 改变时,得一组斜率 $k = -\frac{5}{4}$ 的平行线,且随着 m 的增大,其对应的等值线离原点越远。

我们要求此线性规划问题的最优解,只要在等值线中找到既与可行解区域 $OABC$ 有公共点,又尽可能与原点距离远的那一条就可以了. 从图 2-1 显然可以看出经过 B 点的那条等值线符合要求. 为求出 B 点的坐标,只需求解方程组



$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

可得最优解 $X_1 = \frac{10}{7}, x_2 = \frac{15}{7}$, 对应的目标函数最大值为 $f = 5 \times \frac{10}{7} + 4 \times \frac{15}{7} = 15 \frac{5}{7}$. 由

图 2-1 还可以看出, 这个线性规划问题的最优解是唯一的.

从此例中, 我们可以看到:

1. 对于只含有两个变量的线性规划问题的最优解出现在可行解区域的一个顶点上, 这一点很重要.

2. 利用图解法求解两个变量的线性规划问题可按以下步骤进行:

(1) 求出可行解区域: 在平面直角坐标系中, 可行解区域是各约束条件所表示的半平面的公共部分.

(2) 求最优解: 将目标函数中的 f 看做参数, 做出等值线. 选取一条等值线, 使它与可行解区域有公共点, 并取得最大值或最小值.

例 2-4 用图解法解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max f &= 3x_1 + 5x_2 \\ s. t. \quad &\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

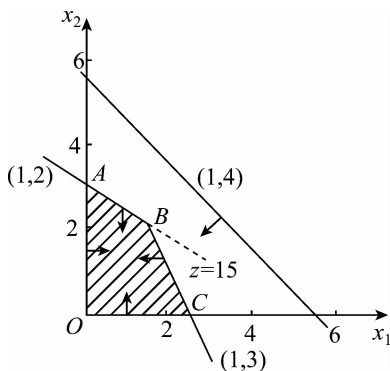


图 2-2

解: 用图解法解此题的结果如图 2-2 所示. 由图可见, 此时一切目标函数等值线都与 AB 边平行, 而最优等值线与 AB 边重合. 因此, AB 上每一点都是最优解, 最优值都是

$$f = 3 \times \frac{10}{7} + 5 \times \frac{15}{7} = 15.$$

此例中最优解有无穷多个, 即出现所谓多重最优解的情况. 但下述结论也真: 最优值可在某些顶点上(此例中的 A, B) 达到.



以上两例的可行解区域都有界,这时我们都得出了明确的、肯定的结论.若可行解区域无界,会发生什么情况呢?

例 2-5 用图解法解线性规划问题

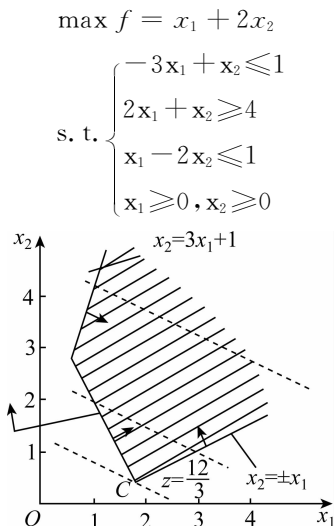


图 2-3

解:此题之图解结果如图 2-3 所示.由图知,可行解区域是一个无界域,因在 S 内 $f = x_1 + 2x_2$ 可以趋向于 ∞ ,故所给问题无解.(注意,我们定义“有解”,是指 f 在 S 内有确定的、有限的最优值.)

例 2-6 我们再来研究上述问题,但将目标函数的最大化改为最小化,即解:

$$\min f = x_1 + 2x_2$$

约束条件同例 2-5.

解:由图 2-3 可知,此时问题有解,最小值在 C 点达到,而 C 点的坐标为 $(\frac{9}{5}, \frac{2}{5})$. 所以最小值为 $f = \frac{9}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} = 4 \frac{1}{5}$.

例 2-7 用图解法解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min f &= 3x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解:求可行解区域,从图 2-4 可以看出,四个约束不等式所表示的半平面没有公共部分.因此,这一线性规划问题没有可行解,更没有最优解.

通过用图解法求解只有两个变量的线性规划,我们可以获得某些解一般线性规划问题的重要规律,主要有以下三点:

第一:线性规划问题可能没有可行解(如例 2-7).当线性规划问题有可行解时,它可能没

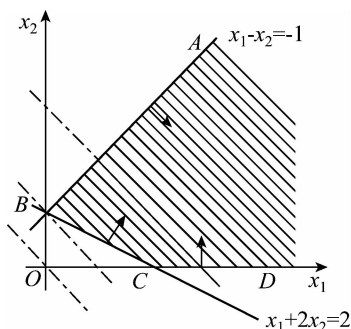


图 2-4

有最优解,如例 2-5;也可能只有唯一最优解,如例 3;还可能有无穷多个解,如例 2-4.

第二:线性规划问题的可行解区域都是“凸”区域.

第三:线性规划问题如果有最优解,则最优解可以在可行解区域的顶点达到.

上述结论对于含有 $n(n > 2)$ 个变量的线性规划问题也是成立的.

第三节 线性规划问题的标准形式

为了便于讨论线性规划问题的求解方法,我们有必要将一般线性规划问题化为标准形式.标准形线性规划问题可以是最大化问题,也可以是最小化问题.我们规定线性规划问题的标准形式必须具有以下特点:

1. 所有变量必须是非负的.
2. 所有约束条件(变量的非负约束除外)必须是等式,且右端常数都大于或等于零.

一般地,我们将标准形式的线性规划问题记为:

$$\begin{aligned} \min(\text{或 } \max) f &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\ s. t. \quad &\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

其紧凑格式为: $\min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

$$s. t. \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

其向量形式是: $\min f = CX$



$$s. t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n P_j x_j = B \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

矩阵形式是: $\min f = CX$

$$s. t. \begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases} \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

如果某些线性规划不是标准形式,必须先把它变为标准形式.

非标准形线性规划问题的标准化。

(1)极大化与极小化:

如果是求极小值 $\max f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, 可令 $f' = -f$, 则有

$$\min f' = \min(-f) = -\max f = -\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

原目标函数 $\max f \Rightarrow \min f' = -\sum_{j=1}^n c_j x_j$.

(2)线性不等式与线性等式:

如果一个线性规划问题的第 i 个约束是“ $\leq$ ”不等式,则我们可以通过在该约束的左边加入一个松弛变量而将它化为等式,但需添加变量符号 ≥ 0 的限制条件.

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \leq b_k \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \text{ 其中 } x_{n+i} \text{ 为非负松弛变量.}$$

如果一个线性规划问题的第 i 个约束是“ $\geq$ ”不等式,则我们可在其左边减去一个剩余变量 (≥ 0) 而将它化为等式,但需添加变量符号 ≥ 0 制条件.

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \geq b_k \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - x_{n+k} = b_k, \text{ 其中 } x_{n+k} \text{ 为非负剩余变量.}$$

(3)取负值变量的处理

若有某个变量 $x_j \leq 0$, 可令 $x'_j = -x_j$ 来代替原变量 x_j , 显然 $x'_j \geq 0$.

(4)非负变量与符号不受限制的变量:

若 x_j 的符号不受限制,即其取值可正可负,则作一个变量替换:令 $x_j = x'_j - x''_j$, 其中 $x'_j, x''_j \geq 0$. 然后,将题中所有的 x_j 都用 x'_j 和 x''_j 来代替.

例 2-8 将线性规划问题

$$\max f = -2x_1 + x_2 + 3x_3$$



$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

化为标准形式.

解:(1) 因为 x_3 无符号要求, 即 x_3 可取正值也可取负值, 标准形式中要求变量非负, 所以令 $x_3 = x'_3 - x''_3$, 且 $x'_3, x''_3 \geq 0$;

(2) 第一个约束条件是“ $\leq$ ”号, 在“ $\leq$ ”左端加入松弛变量 x_4 ($x_4 \geq 0$), 化为等式;

(3) 第二个约束条件是“ $\geq$ ”号, 在“ $\geq$ ”左端减去剩余变量 x_5 ($x_5 \geq 0$), 化为等式;

(4) 第三个约束项右端常数项为 -5 , 方程两端同乘以 -1 , 将右端常数项化为正数;

(5) 目标函数求最大值, 为了化为求最小值, 令 $f' = -f$, 得到 $\min f' = \max f$, 即 f 达到最大值时 f' 达到最小值, 反之亦然.

将原线性规划问题化为标准形式如下:

$$\begin{aligned} \min f &= 2x_1 - x_2 - 3(x'_3 - x''_3) \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 5x_1 + x_2 + (x'_3 - x''_3) + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 - 4(x'_3 - x''_3) - x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2(x'_3 - x''_3) = 5 \\ x_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

以上讨论说明, 任何形式的线性规划问题的数学模型都可以化为标准形.



第四节 标准形线性规划的解的概念

现在我们讲述基、基解和基可行解这三个非常重要的概念. 它们是针对标准形线性规划问题而建立的.

求解线性规划问题

$$\min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \cdots \cdots \cdots (2-9)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \quad (2-10)$$

$$(2-11)$$

就是从满足约束条件(2-10)、(2-11)的方程组中找出一个解, 使目标函数(2-9)达到最小值.



线性规划问题解的概念

(1)可行解:满足约束条件(2-10)、(2-11)的解为可行解.所有可行解的集合为可行域.

(2)最优解:使目标函数达到最优值的可行解.

(3)基:设 A 为约束条件(2-10)的 $m \times n$ 阶系数矩阵($m < n$),其秩 $r(A) = m$,则将 A 的一个 $m \times m$ 非奇异子矩阵 B 称为线性规划问题的基.

$$\text{设 } B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$$

称 B 中的每个列向量 $p_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 为基向量,与基向量 p_j 对应的变量 x_j 为基变量,其它变量为非基变量.

(4)基本解:设 B 是线性规划的一个基,若令 $n-m$ 个非基变量等于零,则所得方程(2-10)的解称为线性规划问题的一个基本解(简称基解).有一个基就可以求得一个基本解,由基的有限性可知,基本解的个数也不会超过 C_n^m 个.

(5)基本可行解:满足变量非负约束条件的基本解,简称基可行解.

(6)可行基:对应于基可行解的基称为可行基.

例 2-9 求下列线性规划问题的基及其基解.

$$\begin{aligned} \min &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + 2x_4 - x_5 = 8 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解:约束方程的系数矩阵为 3×5 矩阵

$$A = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) 因为 p_1, p_2, p_3 线性无关,所以 $\beta_1 = (x_1, x_2, x_3)$ 是一个基.在约束方程中令非基变量 x_4 和 x_5 为零,求得基变量之值为

$$x_1 = 8, x_2 = 1, x_3 = 6.$$

故 β_1 所确定的基解为 $(8, 1, 6, 0, 0)^T$.显然它是可行解.

(2) 因为 x_4, x_3, x_5 的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

所以 $\beta_2 = (x_4, x_3, x_5)$ 也是一个基.令非基变量 x_1, x_2 为零,可以求得

$$x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = -2.$$



故 β_2 所确定的基解为 $(0, 0, 1, 3, -2)^T$. 因 $x_5 < 0$, 所以这个解不是基可行解.

类似地, 还可以求出其他一些基及其基解. 然而, 对于一个给定的矩阵 $A_{m \times n}$ 来说, $Ax = B$ 的基最多只有 C_n^m 个, 从而基解及基可行解的个数也是有限的.

第五节 单纯形法

单纯形方法是求解标准形线性的规划问题的最有效方法之一. 单纯形法的基本思路是: 根据线性规划问题的标准形式, 从可行域中某个可行解开始, 转换到另一个基本可行解(顶点), 并且取得目标函数值时, 问题就得到了解决. 下面我们通过例子来说明计算方法.

例 2-10 用单纯形方法求解线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max f &= 3x_1 + 4x_2 \\ s. t. \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解: 首先将此线性规划问题化为标准形式:

$$\min f' = -f = -3x_1 - 4x_2 \quad (2-12)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \quad (2-13)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \quad (2-14)$$

$$x_2 + x_5 = 2 \quad (2-15)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \quad (2-16)$$

可以看出, 变量 x_3, x_4, x_5 分别只出现在其中一个方程中, 并且系数为 1. 我们将这些变量称为基变量, 变量 x_1, x_2 称为非基变量. 具有上述特点的线性规划问题为典则形式. 将这一典则形式写成表格形式, 如表 2-3 所示.

表 2-3

		c_j					常数
		-3	-4	0	0	0	
		x_j					
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	1	2	1	0	0	6
0	x_4	3	2	0	1	0	12
0	x_5	0	1	0	0	1	2
检验数		3	4	0	0	0	0

表中 c_j 行依次写入目标函数 f' 的各变量系数, x_j 行依次写入各个变量. x_B 列写入了三个基



变量 x_3, x_4 和 x_5 . C_B 列写入了基变量在目标函数 f' 中的对应系数. x_3 行将约束方程(2-13)中各变量的系数依次填入, 类似地, 我们约束方程(2-14)、(2-15)中各变量的系数填入 x_4 行和 x_5 行. 常数列中的 6, 12, 2 分别是约束方程(2-13)、(2-14)、(2-15)右端的常数. 检验数行中各数的求法如下: x_1 对应的检验数记为 b_{01} , 它等于 C_B 列中各数与 x_1 列中各数乘积的和减去 x_1 在目标函数 f' 中系数 (-3) 的差, 即

$$b_{01} = 0 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 0 - (-3) = 3$$

类似地, 可以求得 $x_2, \dots, x_5$ 对应的检验数 $b_{02} = 4, b_{03} = b_{04} = b_{05} = 0$. 最后, 表中右下角(常数列)中的数字是 C_B 列中各数与常数列中各对应数字乘积的代数和, 将它记为 b_0 . 即

$$b_0 = 0 \times 6 + 0 \times 12 + 0 \times 2 = 0$$

将上述形式的表格称为对应于基变量 x_3, x_4, x_5 的单纯形表, 它非常直观的表示了此典则形式(2-12)、(2-13)、(2-14)、(2-15)、(2-16).

在式(2-13)、(2-14)、(2-15)中, 令非基变量 $x_1 = x_2 = 0$, 就得到 $x_3 = 6, x_4 = 12, x_5 = 2$. 这显然是线性规划的一个可行解. 反映到单纯形表 2-3 中, 由 x_B 列和常数列恰好可以看出基变量 x_3, x_4, x_5 的取值. 这样的可行解称为线性规划问题的基本可行解. 这一基本可行解对应的目标函数关系值为 $f' = -3 \times 0 - 4 \times 0 = 0$ (因非基变量 $x_1 = x_2 = 0$). 它恰好是表 2-3 中最右下角的数值 $b_0 = 0$.

但是由于 $f' = -3x_1 - 4x_2$, 显然 x_1 或 x_2 取正数时, 可以使目标函数值进一步减少. 例如, 我们使系数最小的 (-4) 对应的变量 x_2 取尽可能大的正数, 由约束方程(2-13)、(2-14)、(2-15)可得

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 2\theta \geq 0 \\ x_4 = 12 - 2\theta \geq 0 \\ x_5 = 2 - \theta \geq 0 \end{cases}$$

如果任令 $x_1 = 0$, 并且 $x_2 = \theta > 0$, θ 的最大值可以是多少? 由式(2-16), x_3, x_4, x_5 应取非负值, 所以就有

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 2\theta \geq 0 \\ x_4 = 12 - 2\theta \geq 0 \\ x_5 = 2 - \theta \geq 0 \end{cases}$$

或改写为

$$\begin{cases} \theta \leq 3 \\ \theta \leq 6 \\ \theta \leq 2 \end{cases}$$

由此不等式组可知, θ 最大只能取 2, 即 $\theta = \min\left(\frac{6}{2}, \frac{12}{2}, \frac{2}{1}\right) = 2$, 也就是可取 $x_2 = 2$. 这时

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 2 \times 2 = 2 \\ x_4 = 12 - 2 \times 2 = 8 \\ x_5 = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$



于是求得另一可行解: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 8, x_5 = 0$. 对应的目标函数值就是 $f' = -3 \times 0 - 4 \times 2 = -8$.

这一结果我们也可以这样得到,即在公式(2-15)中求得

$$x_2 = 2 - x_5$$

并把上式带入(2-12)、(2-13)和(2-14),就得到此线性规划问题的另一等价形式:

$$\min f' = -f = -8 - 3x_1 + 4x_5 \quad (2-17)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 = 2 & (2-18) \\ 3x_1 + x_4 - 2x_5 = 8 & (2-19) \\ x_2 + x_5 = 2 & (2-20) \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, 5) & (2-21) \end{cases}$$

不难看出,这实际上是以 x_3, x_4, x_2 为基变量的典则形式. 令非基变量 $x_1 = x_5 = 0$, 恰好得到 $x_3 = 2, x_4 = 8, x_2 = 2$. 对应的目标函数值 $f' = -8$

为了更简便,我们可以在单纯形表(表 2-3)上直接进行上述计算:

(1)在检验数一行找到最大的正检验数 $b_{02} = 4$, 它说明应把其对应的非基变量 x_2 调入基变量, 而把某一基变量调出变为非基变量. 为了确定哪一个基变量调出, 在 x_2 列中找到所有正元素, 并分别去除常数列中对应的元素, 求出最小比值. 即求

$$\theta = \min\left(\frac{6}{2}, \frac{12}{2}, \frac{2}{1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

最小比值在 x_5 行上取得, 则应把 x_5 变为非基变量. 在单纯形表(表 2-3)中, 把 x_2 列、 x_5 行交叉处的元素 1 用方框圈起来, 并称这个数为旋转元.

(2)将 x_5 一行所有元素除以旋转元, 使其变为 1. 在本例中, 旋转元就是 1, 因此这一行的各数不变.

再将 x_5 行中的各数乘以 (-2) 分别加到 x_3 行和 x_4 行上, x_5 行中各数乘以 (-4) 加到检验行上, 使得 x_2 列中除了旋转元变为 1, 其余数字都变为零, 就得到表 2-4.

表 2-4

		c_j	-3	-4	0	0	0	常数
		x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
C_B	x_B							
0	x_3		1	0	1	0	-2	2
0	x_4		3	2	0	1	-2	8
-4	x_2		0	1	0	0	1	2
检验数			3	0	0	0	-4	-8

不难看出, 表 2-4 恰好是典则形式(2-17)、(2-18)、(2-19)、(2-20)、(2-21)所对应的单纯形表. 其中 x_B 列已将 x_2 代替了 x_5 , 表示 x_2 调入基变量, x_5 已调出基变量. C_B 列也做出了



相应的改变. 在步骤(2)中所进行的计算称之为初等变换. 而由表 2-3 变换为表 2-4 的整个过程, 称之为迭代.

在表 2-4 中, 如果令基变量等于右边常数列对应的常数, 非基变量取零, 恰好得到

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 8, x_5 = 0$$

这也是一个基本可行解. 它对应的目标函数值恰好是表中右下角的常数 -8. 因此, 以下的计算我们只需在单纯形表上直接进行迭代就可以了.

由于表 2-4 中 x_1 对应的检验数仍为正数 (即在式 (2-17) 中 x_1 的系数为 (-3)), 我们设法将 x_1 调入基变量. 在 x_1 列中, 将此列中的正数 1, 3 分别去除常数列中对应的常数, 求最小比值.

$$\theta = \min\left(\frac{2}{1}, \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{1}$$

所以, 旋转元为 1, 将此旋转元在表 2-4 中用方框圈起来. 将 x_3 行中各元素乘以 (-3) 分别加到 x_4 行和检验行上. 使 x_1 列中除了旋转元变为 1, 其他元素都化为零. 经过迭代, 又得到表 2-5.

表 2-5

		c_j					常数
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
C_B	x_B						
-3	x_1	1	0	1	0	-2	2
0	x_4	0	0	-3	1	4	2
-4	x_2	0	1	0	0	1	2
检验数		0	0	-3	0	2	-14

由表 2-5, 我们得到基本可行解 $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 0$, 对应的目标函数值为 -14.

类似于前面的分析, 表 2-5 是典则形式

$$\begin{aligned} \min f' &= -f = -14 + 3x_3 - 2x_5 \\ \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 &= 2 \\ -3x_3 + x_4 + 4x_5 &= 2 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

所对应的单纯性表.

由于表 2-5 中 x_5 对应的检验数为正数 2, 反映到对应的典则形式中, 就是目标函数 f' 中 x_5 的系数为 -2, 所以将 x_5 调入基变量. 迭代后得到表 2-6.



表 2-6

		c_j					常数
		-3	-4	0	0	0	
C_B	x_B	x_j					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	3
0	x_5	0	0	$-3/4$	$1/4$	1	$1/2$
-4	x_2	0	1	$3/4$	$-1/4$	0	$3/2$
检验数		0	0	$-3/2$	$-1/2$	0	-15

由表 2-6, 我们得到基本可行解: $x_1 = 3, x_3 = \frac{3}{2}, x_3 = x_4 = 0, x_5 = \frac{1}{2}$, 对应的目标函数值为 $f' = -15$. 与前面类似, 表 2-6 是典则形式。

$$\min f' = -f = -15 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 3 \\ -\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 + x_5 = \frac{1}{2} \\ x_2 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{2} \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

所对应的单纯形表. 在此典则形式中, 目标函数 $f' = -15 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$, 非基变量 x_3, x_4 的系数均为正数. 因此, x_3, x_4 取非零正数只能使目标函数值增大. 所以对应的基本可行解已是最优解. 这样, 对于原线性规划问题来说, 我们已求得其最优解为 $x_1 = 3, x_2 = \frac{3}{2}$; 对应目标函数最大值为 $f = 15$.

一般地, 还可以证明:

1. 如果在单纯形表中, 所有检验数都非正, 则对应的基本可行解就是最优解.
2. 如果单纯形表中, 某一检验数大于零, 而且对应变量所在列中没有正数, 则线性规划问题无最优解.
3. 利用例 2-10 的迭代方法, 我们一定可以求出线性规划问题的最优解或可以判断线性规划问题无最优解.

例 2-11 用单纯形方法求解线性规划问题:

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$



$$s. t. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解: 首先将原线性规划问题化为标准形式:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 4x_2 \\ s. t. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + s_1 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + s_3 = 11 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 s_1, s_2, s_3 为引入的松弛变量.

基 $\beta_1 = (s_1, s_2, s_3)$ 的单纯性表如表 2-7 所示

表 2-7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端
z	-5	-4				
a_1	3	5	1			15
a_2	2	1		1		5
a_3	2	2			1	11

原则上说, 任何一个负检验数所对应的变量都可以作为入基变量, 但通常选取值最小的 (即负的最多的) 检验数所对应的变量为入基变量. 在本例中, 我们选取 x_1 为入基变量. 入基变量所对应的列称为入基变量列.

为决定出基变量, 我们将右端列中单纯形表下半部分的各数和入基变量列中在单纯形表下半部分的各数对应作比式, 并以 θ 记这些比式中最小的一个. 即

$$\theta = \min \left\{ \frac{15}{3}, \frac{5}{2}, \frac{11}{2} \right\} = \frac{5}{2}.$$

但需注意, 只对入基变量列中的正数作这种比式.

现将表格右方增加一列, 写入对应比式, 如表 2-8 所示, 最小比值 $\frac{5}{2}$ 所在行包含的基变量 s_2 为出基变量, 出基变量所在的行称为出基变量行. 在 β_1 中调出 s_2 , 调入 x_1 , 便得到一新基 $\beta_2 = (s_1, x_1, s_3)$. 出基变量行和入基变量列相交处的元素 2 叫做主元, 见表 2-8.

表 2-8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端	比
z	-5	-4					
a_1	3	5	1			15	5



a_2	②	1	1	5	$\frac{5}{2}$
a_3	2	2	1	11	$\frac{11}{2}$

为了获得 β_2 的单纯形表,我们对表 2-8 进行一种变换,叫单纯形变换,就是对表中各行进行行的初等变换,使主元变成 1,而使入基变量列中的其余各数(包括检验数)都变为 0. 具体的做法是:首先将出基变量行各数除以 2,得

$$1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2} \quad (2-22)$$

再将其余各行加上或减去(2-22)的适当倍数,使 x_1 一列变成 $(0, 0, 1, 0)^T$. 例如 z 行加上(2-22)的 5 倍,于是该行中各数分别变为

$$-5 + 1 \times 5 = 0, -4 + \frac{1}{2} \times 5 = -\frac{3}{2}, 0 + 0 \times 5 = 0,$$

$$0 + \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}, 0 + 0 \times 5 = 0, 0 + \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{2},$$

它们就是表 2-9 中 z 行中的各数. 类似地,将表 2-8 中 s_1 行、 s_2 行和 s_3 行分别减去(2-22)的 3 倍、2 倍和 2 倍,便得到表 2-9 中其余各行的数. 同时在原基 β_1 中 s_2 是基变量,但在新基 β_2 中, s_2 已被 x_1 取代,故表 2-8 的最左边一列中的 s_2 在表 2-9 中换成了 x_1 . 从表 2-8 到表 2-9 的这种变换就叫做单纯形变换.

表 2-9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端	比
z		$-\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{25}{2}$	
a_1		$\left(\frac{7}{2}\right)$	1	$-\frac{3}{2}$		$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{7}$
a_2	1	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	5
a_3		1		-1	1	6	6

由于表中还有负检验数,故还需换基. 故 x_2 为入基变量. 又

$$\theta = \min \left\{ \frac{15}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1} \right\} = \frac{15}{7}.$$

最小比值出现在表的第一行,故该行所含的基变量 s_1 为出基变量. 在 β_2 中调出 s_1 ,调入 x_2 ,便得到新基 $\beta_2 = (x_2, x_1, s_3)$. 对表 2-9 进行单纯形变换,得到 β_3 的单纯形表,即表 2-10.



表 2-10

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端	比
z			$\frac{3}{7}$	$\frac{13}{7}$		$\frac{110}{7}$	
a_1		1		$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$		$\frac{15}{7}$
a_2	1		$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$		$\frac{10}{7}$	
a_3				$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$	1	$\frac{27}{7}$

因表 2-10 中全部检验数为正,故已得最优解:

$$x_1^* = \frac{10}{7}, x_2^* = \frac{15}{7}, s_1^* = s_2^* = 0, s_3^* = \frac{27}{7}.$$

故对应的目标函数最大值为 $z = \frac{110}{7}$.

例 2-12 用单纯形方法求解线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解: 首先将原线性规划问题化为标准形式:

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6 \end{cases} \end{aligned}$$

这显然是以 x_4, x_5, x_6 为基变量的典则形式,对应的单纯形表为表 2-11.

表 2-11

		c_j	1	-3	-2	0	0	0	常数
		x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
C_B	x_B								
0	x_4		1	2	-2	1	0	0	2
0	x_5		3	-1	-1	0	1	0	3
0	x_6		1	1	-1	0	0	1	1
检验数			-1	3	2	0	0	0	0



由于检验书中有正数,我们选择 x_2 调入基变量. 计算 $\theta = \min\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{1}\right) = \frac{2}{2} = 1$, 所以旋转元为表中方框中的元素, 即基变量 x_4 应调出.

迭代后, 得到表 2-12, 在表中, x_3 对应的检验数为 5, 但这列中的所以元素都小于等于零, 所以线性规划问题无最优解.

表 2-12

		c_j						常数
		1	-3	-2	0	0	0	
C_B	x_B	x_j						
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_1	1/2	1	-1	1/2	0	0	1
0	x_5	7/2	0	-2	1/2	1	0	4
0	x_6	1/2	0	0	-1/2	0	1	0
检验数		-5/2	0	5	-3/2	0	0	-3

例 2-13 用单纯形方法求解线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解: 此线性规划问题已是标准形式, 但不是典则形式, 我们无法直接写出单纯形表. 在这种情况下, 我们首先加入人工变量 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$, 并引入下面的辅助问题:

$$\begin{aligned} \min z &= y_1 + y_2 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + y_2 &= 6 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3; y_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

应主要辅助问题的写法: 每个约束方程添加一个人工变量; 目标函数 z 是所有人工变量的和. 在加入人工变量前, 应使原约束方程右端常数是负非的 (如果有负数, 该约束方程两边乘以 (-1) 就可以了).

显然, 辅助问题是以 y_1, y_2 为基变量的典则形式. 我们就先用单纯形方法求解此辅助问题. 可以证明: 如果辅助问题最优值 $z = 0$, 就求得了原线性规划问题的一个单纯形表和对应的基可行解. 如果辅助问题的最优值 $z > 0$, 则原线性规划问题无可行解. 在前一种情况下, 我们可以继续用单纯形方法求解原线性规划问题. 这种方法称为两阶段方法.

我们先进行第一阶段, 求解辅助问题. 辅助问题对应的单纯形表为表 2-13. 表 2-13 的填写方法与例 12 中表 2-11 的填写方法完全一样. 由此单纯形表出发逐次进行迭代, 可以求得辅助问题的最优解. 迭代过程如表 2-13、表 2-14、表 2-15 所示.

表 2-13

		c_j					常数
		0	0	0	1	1	
C_B	x_j	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
	x_B						
1	y_1	1	2	3	1	0	6
1	y_2	4	5	-6	0	1	6
检验数		5	7	-3	0	0	12

表 2-14

		c_j					常数
		0	0	0	1	1	
C_B	x_B	x_j					
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
1	y_1	$-3/5$	0	27/5	1	$-2/5$	18/5
1	y_2	4/5	1	$-6/5$	0	1/5	6/5
检验数		$-3/5$	0	$-7/5$	27/5	0	18/5

表 2-15

C_B x_B		c_j x_j					常数
		0	0	0	1	1	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
1	y_1	$-1/9$	0	1	$5/27$	$-2/27$	$2/3$
1	y_2	$2/3$	1	0	$2/9$	$1/9$	2
检验数		0	0	0	-1	-1	0

由表 2-15 可知,辅助问题最优值为零.这时基变量为 x_3, x_2 , 人工变量已全部从基变量中调出.我们就转入第二阶段:求解原线性规划问题.

在第二阶段,将表 2-15 中的 c_j 行、检验数行以及 y_1 列、 y_2 列全部划去,重新补入原问题的 c_j 行,并重新计算检验数,得到表 2-16.

表 2-16

$\begin{array}{c} \nearrow c_j \\ \nearrow x_j \\ \nearrow x_B \end{array}$		1	-1	1	常数
		x_1	x_2	x_3	
C_B	x_B				
1	x_3	-1/9	0	1	2/3
-1	x_2	2/3	1	0	2
检验数		16/9	0	0	-4/3



在表 2-16 中, 检验数已全部非正, 我们已求得原问题的最优解: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{2}{3}$. 对应的目标函数最小值为 $-\frac{4}{3}$. 但应注意, 在一般情况下, 进入第二阶段后, 可能仍需若干次迭代, 才能求得原问题的最优解或判定无最优解.

例 2-14 用单纯形方法求解线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 12x_3 &= 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解: 原线性规划问题不是典则形式, 我们先进行第一阶段: 引入辅助问题.

$$\begin{aligned} \min z &= y_1 + y_2 \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + y_1 &= 3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 12x_3 + y_2 &= 11 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3; y_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

我们得以人工变量 y_1, y_2 为基变量的单纯形表(表 2-17). 迭代后得到表 2-18.

表 2-17

C_B x_B c_j x_j		0	0	0	1	1	常数
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
1	y_1	1	− 2	4	1	0	3
1	y_2	3	− 7	12	0	1	11
检验数		4	− 9	16	0	0	14

表 2-18

C_B c_j x_j x_B		0	0	0	1	1	常数
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
		1	x_3	1/4	− 1/2	1	
1	y_2	0	− 1	0	− 3	1	2
检验数		0	− 1	0	− 4	0	2

在表 2-18 中, 我们已求得了辅助问题的最优解. 但因最优值为 $z = 2 > 0$, 所以原问题没有可行解.

例 2-15 某工厂利用 A_1, A_2 两种原料, 生产 B_1, B_2, B_3 三种产品, 工厂现有原料数量、生产每吨产品需要的原料数量以及每吨产品可获得的利润如表 2-19 所示:



问:(1)在现有条件下,应如何组织生产,才能使该厂获得最大利润?

(2)如果必须生产 3 吨产品 B_3 , 又应如何组织生产,才能使该厂获得最大利润?

表 2-19

每吨产品所需 原料(吨) 产品	原料				现有原料(吨)
		B_1	B_2	B_3	
A_1		2	1	0	30
A_2		0	2	4	50
每吨产品可得利润(百万元)		3	2	$\frac{1}{2}$	

解:(1)设该厂应生产 x_1 吨产品 B_1 , 生产 x_2 吨产品 B_2 , 生产 x_3 吨产品 B_3 , 由题意, 可得此问题的数学形式:

$$(I) \max f = 3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

将其化为标准形式:

$$(II) \min f' = -f = -3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 30 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 50 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

这显然是以 x_4, x_5 为基变量的典则形式, 对应的单纯形表为 2-20.

表 2-20

		c_j					常数
		-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_4	2	1	0	1	0	30
1	x_5	0	2	4	0	1	50
检验数		3	2	$\frac{1}{2}$	0	0	0

由此单纯形表(表 2-20)出发, 逐次进行迭代, 可得问题(II)的最优解. 迭代过程如表 2-20、表 2-21、表 2-22 所示.



表 2-21

c_j x_j C_B x_B		-3 -2 $-\frac{1}{2}$ 0 0					常数
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	15
0	x_5	0	2	4	0	1	50
检验数		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	-45

表 2-22

c_j x_j C_B x_B		-3 -2 $-\frac{1}{2}$ 0 0					常数
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	x_1	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	2.5
-2	x_2	0	1	2	0	$\frac{1}{2}$	25
检验数		0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-57.5

由表 2-22 可知,问题(II)的最优解为 $x_1 = 2.5, x_2 = 25, x_3 = x_4 = x_5 = 0$; 最优值 $f' = -57.5$. 即在现有条件下,生产 2.5 吨产品 B_1 , 25 吨产品 B_2 , 不生产 B_3 , 工厂可获得最大利润 57.5(百万元).

(2)上面的最优生产方案中只生产 B_1 和 B_2 , 不生产 B_3 , 可以在原约束条件中增加一个约束条件 $x_3 = 3$, 从头做起. 另外, 也可以根据对应于最优解的单纯形表 2-22 写出相应的典则形式

$$\begin{aligned} \min f' &= -f = -57.5 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ &\begin{cases} x_1 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 = 2.5 \\ x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 25 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

然后令 $x_3 = 3, x_4 = x_5 = 0$, 就可得到 $x_1 = 2.5 + 3 = 5.5, x_2 = 25 - 2 \times 3 = 19$. 对应的目标函数最优值 $f' = -57.5 + \frac{1}{2} \times 3 = -56$. 即 $f = -f' = 56$.

不难看出, 每生产 1 吨产品 B_3 , 就会使利润减少 0.5(百万元). 所以, 若必须生产 3 吨产品 B_3 时, 最优生产安排是生产 5.5 吨产品 B_1 , 19 吨产品 B_2 , 3 吨产品 B_3 , 可获得最大利润 56(百万元).

由本节例题可以看出, 求线性规划问题一般可以分为两个阶段. 如果线性规划问题已具有