目　　录

引 言

复数理论的产生与发展经历了漫长而又艰难的岁月.复数16世纪人们在解决三次代数方程问题时引入的.在1545年,意大利数学物理学家卡丹($H \cdot Cardan$)在其所著《重要的艺术》一书中列出“将10分成两部分,使其积为40”的问题,即研究方程$x(10-x)=40$的根,他求出形式分别为$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$,积为$25-(-15)=40$的根.但由于这只是单纯从形式上推广而引进复数,并且人们之前就已断言负数开平方是没有意义的,因而复数在历史上长期不能为人们所接受.“虚数”这一名词就恰好反映了这一点.

复变函数论,又称复分析,产生与18世纪.数学家达朗贝尔($D'Alembert$)、欧拉($L \cdot Euler$)与拉普拉斯等人逐步阐明了复数的几何意义与物理意义,建立了系统的复数理论,从而使人们终于接受并理解了复数.复变函数的理论基础是在19世纪奠定的,主要是围绕柯西($A.L.Cauchy$),魏尔斯特拉斯($K \cdot Weierstrass$)和黎曼($B \cdot Riemann$)三人的工作进行的.20世纪初,复变函数理论又有了很大的进展,数学家列夫勒($M \cdot Mittag-Leffler$)、庞加莱($J \cdot Poincare'$)等都作了大量的研究工作,开拓了复变函数理论更广阔的研究领域.我国老一辈的数学家在复变函数理论的研究中也作了重要的贡献,如著名数学家陈建功、华罗庚、杨乐等,他们在国际数学界也享有很高的声誉.

复变函数理论发展到今天,已经是一门相当成熟的学科,它成为数学的一个重要分支,广泛地深入到数学的其它分支中,如微分方程、积分方程、概率论、数论等.作为一种有力的工具,复变函数理论广泛地应用到自然科学的众多领域,如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等.

第1章 复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数，它是本课程的研究对象.复变函数的理论与方法在自然科学与工程技术中都有广泛地应用，如应用于物理、天体力学、空气动力学、各类电子技术等方面.本章将对中学阶段学习的内容进行简要的复习和补充，并在此基础上进一步介绍复平面上的区域、复变函数的极限及复变函数的连续性等概念，为后面各章更深入地学习解析函数的理论和方法奠定基础.

1.1 复数的概念及运算

1.1.1 复数的概念

在中学代数中已经知道，一元二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解.为求解此类方程，引入了新的数 i，规定 $i^2=-1$，即 $i=\sqrt{-1}$，且称 i 为虚数单位.从而方程 $x^2+1=0$ 的根记为 $x=\pm i$.

对于任意两个实数 x，y，形如 $x+iy$ 或 $x+yi$ 的数，称为复数，常用字母 z 表示，即

$$z=x+iy \text{ 或 } z=x+yi\text{，}$$

其中实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}(z)\text{，}y=\mathrm{Im}(z)\text{.}$$

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相等，当且仅当它们的实部和虚部分别对应相等，即 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$.虚部为零的复数可看作实数，即 $x+i\cdot 0=x$，特别地，$0+i\cdot 0=0$，因此，全体实数是全体复数的一部分.全体复数组成的集合称为复数集，记作 C，即 $C=\{x+iy\,|\,x,y\in R\}$，其中 R 为实数集.

实部为零但虚部不为零的复数称为纯虚数，复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为共轭复数，记为

$$\overline{(x+iy)}=x-iy \quad \text{或} \quad \overline{x-iy}=x+iy$$

例 1.1.1　当实数 x，y 为何值时，等式 $\dfrac{(x+1)+i(y-3)}{i}=1+i$ 成立.

解： 由 $\dfrac{(x+1)+i(y-3)}{i}=1+i$，得

$$(x+1)+i(y-3)=-1+i$$

根据两复数相等，比较等式两端的实虚部，有 $\begin{cases}x+1=-1\\ y-3=1\end{cases}$，解得 $x=-2$，$y=4$.

1.1.2　复数的表示方法

1.1.2.1　复数的点表示

从上述复数的定义中可以看出，一个复数 $z=x+iy$ 实际上是由一对有序实数 (x,y) 唯一确定. 因此，如果可以用直角坐标系中平面上的点 (x,y) 与复数 $z=x+iy$ 对应，就建立了平面上全部的点和全体复数间的一一对应关系.

由于 x 轴上的点和 y 轴上非原点的点分别对应着实数和纯虚数，因而通常称 x 轴为实轴，称 y 轴为虚轴，这样表示复数 z 的平面称为复平面或 z 平面.

复数 z 可以表示为 (x,y)，即 $z=(x,y)$，称为复数 z 的点表示.

引进复平面后，我们在“数”与“点”之间建立了一一对应关系，为了方便起见，今后我们就不再区分“数”和“点”及“数集”和“点集”.

1.1.2.2　复数的向量表示

由图 1-1-1 中可以知道，复数 $z=x+iy$ 与从原点到点 z 所引的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 也构成一一对应关系(复数 O 对应零向量). 所以复数 z 可以用向量 $\overrightarrow{Oz}$ 表示，即 $z=\overrightarrow{Oz}$，称为复数 z 的向量表示. 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的模，记为：

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$$

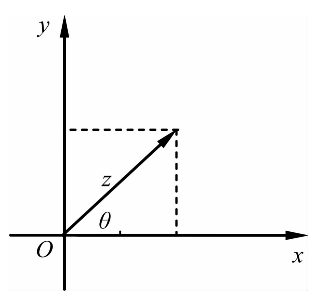

图 1-1-1

显然，对于任意复数 $z=x+iy$ 均有 $|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$，$|z|\leqslant|x|+|y|$.

另外,根据向量的运算及几何知识,我们可以得到两个重要的不等式

$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$　　(三角形两边之和 $\geqslant$ 第三边,图 1-1-2)

$\| z_1 - z_2 \| \leqslant |z_1 - z_2|$　　(三角形两边之差 $\leqslant$ 第三边,图 1-1-2)

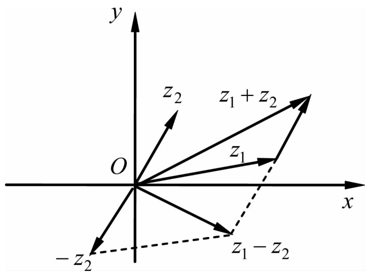

图 1-1-2

$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ 与 $\| z_1 - z_2 \| \leqslant |z_1| - |z_2|$ 两式中等号成立的几何意义是:复数 z_1 ,z_2 分别与 $z_1 + z_2$ 及 $z_1 - z_2$ 所表示的三个向量共线且同向.

1.1.2.3　复数的三角表示

向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向间的夹角 θ(θ 满足 $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$)称为复数 z 的辐角($Argument$),记为 $\theta = Argz$.任意一个非零复数 z 均有无穷多个辐角,若以 $argz$ 表示其中的一个特定值,且满足条件:$-\pi < argz \leqslant \pi$,则该值称为 $Argz$ 的主值或主角或 z 的主辐角,则有:

$$\theta = Argz = \arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

注意:当 $z = 0$ 时,其模为零,辐角无意义.

从直角坐标与极坐标的关系,

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

我们还可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z ,即有

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

称为非零复数 z 的三角表示.

1.1.2.4　复数的指数表示

根据著名的欧拉($Euler$)公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

则可化为 $z = re^{i\theta}$,称为非零复数 z 的指数表示.

例 1.1.2　试确定$\dfrac{z+2}{z-1}$的实部与虚部。

解:考虑 $z=x+iy$,将其代入原式,得

$$\frac{z+2}{z-1}=\frac{(x+2)+iy}{(x-1)iy}$$

$$=\frac{(x+2)+iy}{(x-1)iy}\cdot\frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$$=\frac{(x+2)(x-1)+y^2+i[y(x-1)-y(x+2)]}{(x-1)^2+y^2}$$

因此

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{x^2+x-2+y^2}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

例 1.1.3　将 $1-\sqrt{3i}$ 化为三角表示和指数表示.

解： $|z|=2,\arg z=\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$；

故三角表示为 $z=2[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$，

指数表示为 $z=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

1.1.3　复球面与无穷远点

1.1.3.1　复数的球面表示法

复数除了可用平面内的点或向量表示外，还可以用球面上的点表示. 取一个与复平面 C 相切于原点 $z=0$ 的球面，球面上的一点 S 与原点重合. 过 S 作垂直于复平面 C 的直线与球面相交于另一点 N，S、N 分别称为球面的南极与北极.

在复平面 C 上任取一点 z，连接 N 与点 z 的直线必交于球面上的一点 p；反之，在球面上任取一点 p（N 除外），连接 N、p 并延长，必交于复平面上唯一的一点 z，这样就建立了复平面上的所有点与球面上除 N 点之外的所有点的一一对应关系. 即复数可用球面上的点来表示（如图 1-1-3 所示）.

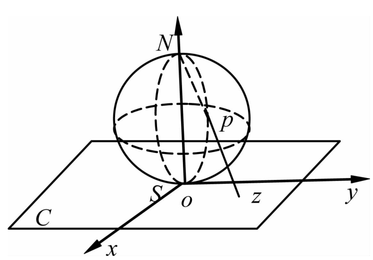

图 1-1-3

1.1.3.2　扩充复平面

对于球面上的 N 点，复平面上没有点与之对应，但我们可以看到当点 z 无限远离原点时，点 p 无限接近于 N . 于是我们规定：复平面 C 上，无限远离原点的点称为“无穷远点”，它与球面上的 N 点相对应.

不包含无穷远点在内的复平面称为有限复平面；包含无穷远点在内的复平面称为扩充复平面. 复球面能把扩充复平面上的无穷远点明显地表示出来，显示了它与复平面相比的优越性.

1.1.3.3　复数 ∞

我们规定：扩充复平面上的无穷远点与复数中的“无穷大”相对应，记作 $z=\infty$ ，对复数 $z=\infty$ 而言，其模规定为 $+\infty$ ，而其实部、虚部、辐角均无意义. 对于其他每一个复数 ∞ ，都有 $|z|<+\infty$.

复数 ∞ 与有限复数 z 的四则运算规定如下：

加法　$z+\infty=\infty+z=\infty\quad(z\neq\infty)$ ；

减法　$z-\infty=\infty-z=\infty\quad(z\neq\infty)$ ；

乘法　$z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty\quad(z\neq\infty)$ ；

除法　$\dfrac{z}{\infty}=0,\dfrac{\infty}{z}=\infty(z\neq\infty),\dfrac{z}{0}=\infty(z\neq0$，但可为 $\infty)$

其他运算如 $\infty\pm\infty,0\cdot\infty,\dfrac{\infty}{\infty},\dfrac{0}{0}$ 均无意义.

习题 1.1

1. 求下列复数的实部与虚部，共轭复数、模与辐角的主值：

(1) $(1+2i)(2-\sqrt{3}i)$ ；　　　　(1) $\dfrac{1}{(3+i)^2}$.

2. 试求当 x 、y 等于什么实数时，$(x+y)^2i-\dfrac{6}{i}-x=-y+5(x+y)i-1$ 成立.

3. 把下列复数化为三角表示式和指数表示式：

(1) $2i$ ；　　　　(2) $-\dfrac{1}{3}$.

1.2 复数的运算及其性质

1.2.1 复数的一些基本运算

1.2.1.1 复数的四则运算

设两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，则复数四则运算规定

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)\text{；}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}(z_2 \neq 0)$$

容易验证复数的四则运算满足与实数的四则运算相应的运算规律.

引进上述运算后的复数集称为复数域，必须特别提出的是，在复数域中，复数是不能比较大小的.

1.2.1.2 复数的共轭

共轭复数的运算有如下性质：

$$\bar{\bar{z}} = z\text{；}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\text{；}$$

$$z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2\text{；}$$

$$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$$

例 1.2.1　设 $z_1 = 4 - 3i$，$z_2 = -2 + i$，求 $\frac{z_1}{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解： $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-3i}{-2+i} = \frac{(4-3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-11}{5} + \frac{2}{5}i$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{-11}{5} - \frac{2}{5}i$.

例 1.2.2　设 $z = \frac{2+i}{i} - \frac{2i}{1-i}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$，$z\bar{z}$.

解：

$$\begin{aligned} z &= \frac{2+i}{i} - \frac{2i}{1-i} = \frac{(2+i)(-i)}{i(-i)} - \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= 1 - 2i - \frac{2i-2}{2} = 2 - 3i \end{aligned}$$

故 $\mathrm{Re}(z)=2,\mathrm{Im}(z)=-3,z\overline{z}=(2)^2+(-3)^2=13$.

例 1.2.3 求复数 $\frac{1+z}{1-z}$ ($z\neq 1$)的实部、虚部和模。

解:因为

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)\overline{(1-z)}}{(1-z)\overline{(1-z)}}=\frac{1-z\overline{z}+z-\overline{z}}{|1-z|^2}$$

$$=\frac{1-|z|^2+2i\mathrm{lm}z}{|1-z|^2}$$

所以

$$\mathrm{Re}\,\frac{1+z}{1-z}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\text{ , }\mathrm{lm}\,\frac{1+z}{1-z}=\frac{2\mathrm{lm}z}{|1-z|^2}$$

又

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|^2=\frac{1+z}{1-z}\cdot(\overline{\frac{1+z}{1-z}})=\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}}$$

$$=\frac{|1+z|^2}{|1-z|^2}=\frac{1+|z|^2+2\mathrm{Re}z}{|1-z|^2}$$

所以

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|=\frac{\sqrt{1+|z|^2+2\mathrm{Re}z}}{|1-z|}\text{ 。}$$

例 1.2.4 试写出方程 $x^2+2x+y^2=1$ 的复数形式。

解:令 $z=x+yi$,则 $\overline{z}=x-yi$,于是

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}\text{ , }y=\frac{z-\overline{z}}{2i}\text{ , }x^2+y^2=|z|^2=z\overline{z}$$

将以上三式代入原方程,得到复数方程为

$$z\overline{z}+z+\overline{z}=1\text{ 。}$$

1.2.1.3　复数的乘积与商

为了研究问题方便,我们用复数的三角表示法来计算复数的乘积与商. 设非零复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

类似地有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

另外，两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和．两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于它们的辐角之差．

由指数性质即可推得复数的乘除有

$$\left.\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}\right\}$$

因此

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \;,\; \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0)$$

$$\left.\begin{aligned} Argz_1 z_2 &= Argz_1 + Argz_2 \\ Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= Argz_1 - Argz_2 \end{aligned}\right\}$$

说明：两个复数 z_1 ，z_2 的乘积（或商），其模等于这两个复数模的乘积（或商），其辐角等于这两个复数辐角的和（或差）．

特别当 $|z_2| = 1$ 时可得：$z_1 z_2 = r_1 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ ．

此即说明单位复数 $(|z_2| = 1)$ 乘任何数，几何上相当于将此数所对应的向量旋转一个角度．

另外，也可把公式的 $Argz$ 换成 $argz$（某个特定值），若 $argz$ 为主值时，则公式两端允许相差 2π 的整数倍，即有

$$\left.\begin{aligned} Arg(z_1 z_2) &= argz_1 + argz_2 + 2k\pi \\ Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= argz_1 - argz_2 + 2k\pi \end{aligned}\right\}$$

1.2.2　复数的幂与方根

设 n 为正整数，n 个相同的非零复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记为 z^n ．推广到有限个复数的情况，特别地，

当 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ 时，有

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

若定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$ ，并规定 $z^0 = 1$ ，那么当 $z \neq 0$ 时，对于任意整数 n ，上式均成立．当 $r = 1$ 时，就得到熟知的德摩弗（$DeMoiVre$）公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

我们称满足方程 $\omega^n = z$ 的复数 ω 为复数 z 的 n 次方根，记作 $\sqrt[n]{z}$，即 $\omega = \sqrt[n]{z}$，则令

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}),(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

一个复数 $z \neq 0$ 的 n 次方根共有 n 个不同值.

例 1.2.5 计算 $(1+i)^6$。

解： $1 + i = [\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})]^6 = 2^3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^6$

$$= 8(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}) = -8i$$ 。

例 1.2.6 求 $\sqrt[3]{-8}$ 的值.

解： 因为 $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$，所以

$$\sqrt[3]{-8} = 2(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}),(k = 0,1,2)$$

$$k = 0,\omega_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$k = 1,\omega_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$

$$k = 2,\omega_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}i$$

例 1.2.7 设 n 为正整数，证明

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} = -1$$

证明： 因为 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$，$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

于是

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1}$$

$$= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$= (\cos2n\pi + i\sin2n\pi)\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + (\cos4n\pi + i\sin4n\pi)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -1$$

习题 1.2

1. 计算下列各式的值：

(1) $(1+\sqrt{3}i)^3$ ；　　(2) $i^8-4i^{21}+i$ ；

(3) $(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^n$ ；　　(4) $(2-2i)^{\frac{1}{3}}$

2. 设 $z=e^{it}$ ，证明：

(1) $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos nt$ ；　　(2) $z^n-\frac{1}{z^n}=2i\sin nt$

1.3 复平面上的点集

1.3.1 区域的概念

因为平面上的点与复数一一对应，因此点可以用复数表示，而复数可看作点. 对于一些特殊的平面点集，我们将采用复数所满足的等式或不等式来表示.

1.3.1.1　邻域

满足不等式 $|z-z_0|<\rho$ 的所有点 z 组成的平面点集（以下简称点集）称为点 z_0 的 ρ－邻域，记为 $N_\rho(z_0)$. 而由不等式 $0<|z-z_0|<\rho$ 所确定的点集称为 z_0 的去心邻域.

显然，$N_\rho(z_0)$ 即表示以 z_0 为心，以 ρ 为半径的圆的内部.

1.3.1.2　内点

设 E 为平面上的一个点集，z_0 为 E 中任意一点，如果存在 z_0 的一个邻域，该邻域内所有点都属于 E ，那么 z_0 为 E 的内点.

1.3.1.3　边界

如果点 z_0 的任意邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的边界点.

D 的所有边界点组成的点集称为 D 的边界，记为 ∂D 。若 $\exists r>0$ ，使得 $N_r(z_0)\cap D=\phi$ ，则称 z_0 为 D 的外点.

若 $\exists M>0$ ，$\forall z\in E$ ，均有 $|z|\leqslant M$ 则称 E 为有界集，否则称 E 为无界集.

1.3.1.4　开集、闭集

若 E 的所有点均为内点，则称 E 为开集.

开集 E 连同边界构成的集合称为闭集.

1.3.1.5　连通的

设 E 为开集,如果对 E 中的任意两点,都可用完全属于 E 的折线连接起来,则称 E 为连通的.

1.3.1.6　开区域、闭区域

若非空点集 D 满足下列两个条件:

(1) D 为开集;

(2) D 是连通的,

则称 D 为开区域或区域.

开区域连同其边界一起称为闭区域,即区域 D 加上它的边界 C 称为闭区域,记为 $\overline{D} = D + C$.(如图 1-3-1)

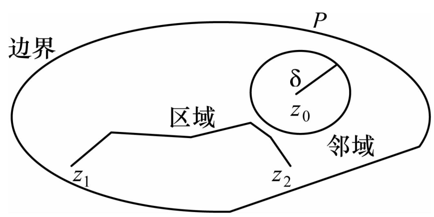

图 1-3-1

例如,z 平面上以点 z_0 为心,R 为半径的圆周内部(即圆形区域):$|z - z_0| < R$;z 平面上以点 z_0 为心,R 为半径的圆周及其内部(即圆形闭区域)$|z - z_0| \leqslant R$;上两个区域都以圆周 $|z - z_0| = R$ 为边界,且均为有界区域;上半平面 $\mathrm{Im}z > 0$,下半平面 $\mathrm{Im}z < 0$,它们都以实轴 $\mathrm{Im}z = 0$ 为边界,且均为无界区域;左半平面 $\mathrm{Re}z > 0$,右半平面 $\mathrm{Re}z < 0$,它们都以虚轴 $\mathrm{Re}z = 0$ 为边界,且均为无界区域;带形区域表为 $y_1 < \mathrm{Im}z < y_2$,其边界为 $y = y_1$ 与 $y = y_2$,亦为无界区域;圆环区域表为 $r < |z| < R$,其边界为 $|z| = r$ 与 $|z| = R$,为有界区域.

1.3.2　平面曲线

在中学课程中已经知道,平面曲线可以用一对连续函数

$$x = x(t),\ y = y(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

来表示(曲线的参数方程表示).

我们现在用实变数的复值函数 $z(t)$ 来表示,即

$$z(t) = x(t) + iy(t),(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

例如,以坐标原点为圆心,以 a 为半径的圆周,其参数方程为

$$x = a\cos t, y = a\sin t,\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

把它写成复数的形式为

$$z = a(\cos t + i\sin t), (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

设 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是两个关于实数 t 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续实函数，则由方程 $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 所确定的点集 C 称为 z 平面上的一条连续曲线，$z(\alpha)$ 及 $z(\beta)$ 分别称为 C 的起点和终点.

对任意满足 $\alpha < t_1 < \beta$ 及 $\alpha < t_2 < \beta$ 的 t_1 与 t_2，若 $t_1 \neq t_2$ 时有 $z(t_1) = z(t_2)$，则点 $z(t_1)$ 称为 C 的重点；无重点的连续曲线，称为简单曲线（约当曲线）；$z(\alpha) = z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线（约当闭曲线）. 由此可知，简单曲线自身不会相交. 图 1-3-2(3) 与 1-3-2(4) 都不是简单曲线.

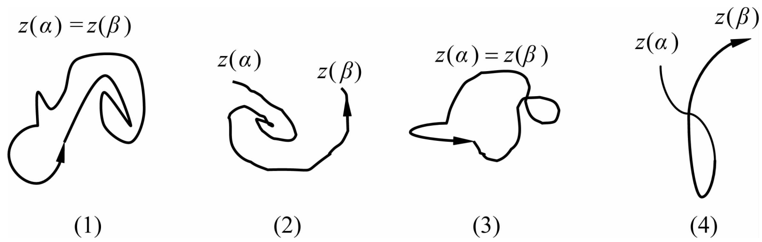

图 1-3-2

(1)简单、闭；(2)简单、不闭；(3)不简单、闭；(4)不简单、不闭

若在 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 上时，$x'(t)$ 及 $y'(t)$ 连续且不全为零，则称 C 为光滑(闭)曲线. 由有限条光滑曲线连接而成的连续曲线称为分段光滑曲线.

定理 1.3.1(约当定理)：一条简单闭曲线 C 将 z 平面唯一地分为 C 、$I(C)$ 、$E(C)$ 三个点集(如图 1-3-3 所示)，

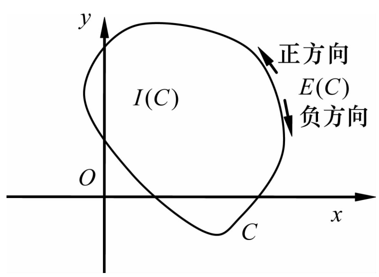

图 1-3-3

它们具有如下性质：

(1)彼此不交；

(2) $I(C)$ 与 $E(C)$ 一个为有界区域(称为 C 的内部)，另一个为无界区域(称为 C 的外部)；

(3)若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$，另一个端点属于 $E(C)$，则 P 与 C 必有交点.

对于简单闭曲线的方向，通常我们是这样来规定的：当观察者沿 C 绕行一周时，C 的内部(或外部)始终在 C 的左方，即“逆时针”(或“顺时针”)方向，称为 C 的正方向(或负方向).

1.3.3 单连通多连通区域

设 D 为复平面上的区域，如果对 D 内的任一条简单闭曲线，曲线的内部总属于 D，则称 D 为单连通区域，不是单连通的区域称为多(复)连通区域.

一条简单闭曲线的内部都是单连通区域，单连通区域 D 具有这样的特征：属于 D 的任何一条简单闭曲线，在 D 内可以经过连续的变形而缩成一点，而多连通区域就不具有这个特征. 用通俗的语言来说，所谓的单连通区域就是没有洞的区域(如图 1-3-4(1))，而多连通区域则是有洞的区域(如图 1-3-4(2)).

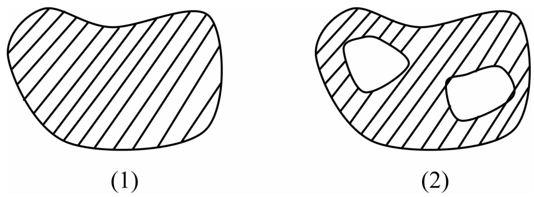

图 1-3-4

习题 1.3

1. 指出方程 $|z+2|+|z-2|=6$ 所表示的曲线，并作图.

2. 指出下列点集的平面图形，是否是区域或闭区域，是否有界.

(1) $|z|\leqslant|z-4|$；　　(2) $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$ 且 $\mathrm{Re}(z)<3$.

1.4 复变函数

1.4.1 复变函数的概念

设 E 是由复数 $z=x+iy$ 构成的点集，如果有一个确定的法则 f，按照这个法则，对于 E 内每一复数 z，都有一个或几个复数 $w=u+iv$ 与之对应，则称复变数 w 是复变数 z 的函数(简称复变函数)，记为 $w=f(z)$.

注：如果 z 的一个值对应一个 w 的值，那么称 w 是 z 的单值函数；如果 z 的一个值对应

两个或两个以上 w 的值，那么称 w 是 z 的多值函数；E 称为函数 $w=f(z)$ 的定义域，w 值的全体组成的集合称为函数 $w=f(z)$ 的值域.

例如，$w=z^2$，$w=\bar{z}$ 及 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$　$(z\neq 1)$ 均为单值函数，$w=z^{\frac{1}{2}}$ 及 $w=Argz(z\neq 0)$ 均为多值函数.

今后如无特别说明，所提到的函数均为单值函数.

设 $w=f(z)$ 是定义在点集 E 上的函数，若令 $z=x+iy$，$w=u+iv$，则 u、v 均随着 x，y 而确定，即 u，v 均为 x，y 的二元实函数，因此我们常把 $w=f(z)$ 写成

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

其中，$u(x,y)$，$v(x,y)$ 是两个实二元函数.

因此，复变函数 $w=f(z)$ 的性质就取决于两个实二元函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 的性质.

例 1.4.1　设 $w=z^2$. 令 $z=x+iy$，$w=u+iv$，那么

$$u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi,$$

因此，函数 $w=z^2$ 对应于两个实二元函数：

$$u=x^2-y^2, v=2xy.$$

若 z 为指数形式，$z=re^{i\theta}$，则 $w=f(z)$ 又可表示为 $w=p(r,\theta)+iq(r,\theta)$，其中 $p(r,\theta)$，$q(r,\theta)$ 均为 r、θ 的二元实函数.

我们可以把复变函数理解为复平面 z 上的点集和复平面 w 上的点集之间的一个对应关系(映射或变换)，这是由于在复平面上我们不再区分“点”(点集)和“数”(数集). 故今后我们也不再区分函数、映射和变换.

1.4.2　映射

在微积分中，常把实函数用几何图形来表示，图形可以直观地帮助我们理解和研究函数的性质. 对于复变函数 $w=f(z)$，由于它反映了两对变量 x,y 和 u,v 之间的对应关系，因而无法用同一个平面内的几何图形表示出来，必须把它看成两个复平面上点集之间的对应关系. 所以我们要取两张复平面，分别称为 z 平面和 w 平面.

将一个复变函数 $w=f(z)$ 在几何上看成是从 z 平面上的点集 G (如点、线、区域等)变到 w 平面的点集 G^* 的一个映射. 若 G 中点 z 映射后对应 G^* 中的点 w，则称 z 是 w 的原象，w 是 z 的象.

例如，函数 $w=\bar{z}$ 所构成的映射，显然把 z 平面上的点 $z=a+ib$ 映射成 w 平面上的点 $w=a-ib$；把 $z_1=2+5i$ 映射成 $w_1=2-5i$.

如果把 z 平面和 w 平面重叠在一起，不难看出函数 $w=\bar{z}$ 是关于实轴的一个对称映射. 因此，通过映射函数 $w=\bar{z}$，z 平面上的任一图形的映射是关于实轴对称的一个完全相同的图形.

而函数 $w=z^2$ 所构成的映射将点 $z_1=i$，$z_2=1+2i$ 分别映射到点 $w_1=-1$，$w_2=-3+4i$. 可见，通过映射 $w=z^2$，z 的辐角增大一倍，模变为原来的平方.

函数 $w=z^2$ 将直线 $x=1$ 映射成什么图形呢？

设 $z=x+iy$，则 $w=z^2=x^2-y^2+2xyi$，即

$$u(x,y)=x^2-y^2, v(x,y)=2xy$$

将 $x=1$ 代入得 $u=1-y^2, v=2y$，从而有 $v^2=4(1-u)$，其在 w 平面上映射的图形为开口向左的抛物线.

例 1.4.2 求下列各点、区域或曲线族在映射 $w=z^2$ 下的象。

(1) $z_1=1+\sqrt{3}i$，$z_2=2i$，$z_3=-1+i$；

(2)角形域 $0\leqslant \arg(z)\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$；

(3)双曲线族 $x^2-y^2=C_1$ 及 $2xy=C_2$（C_1、C_2 为常数）

解：(1)由 $w=z^2$ 可求出 $w_1=z_1{}^2=(1+\sqrt{3}i)^2=-2+2\sqrt{3}i$，故映射 $w=z^2$ 将 z 平面上的点 $z_1=1+\sqrt{3}i$ 映射成 w 平面上的 $w_1=-2+2\sqrt{3}i$。同理可知，映射 $w=z^2$ 将 z 平面上的点 z_2, z_3 分别映射成 w 平面上的 $w_2=-4$ 和 $w_3=-2i$（图 1.4-1）。

(2)设 $z=re^{i\theta}$，则 $w=z^2=r^2e^{i2\theta}$，有

$$Arg(w)=2\theta=2Arg(z)$$

即通过映射 $w=z^2$，z 的辐角增大一倍，故 z 平面上的角形域 $0\leqslant\arg(z)\leqslant\alpha$ 映射成 w 平面上的角形域 $0\leqslant\arg w\leqslant 2\alpha$（图 1-4-1）.

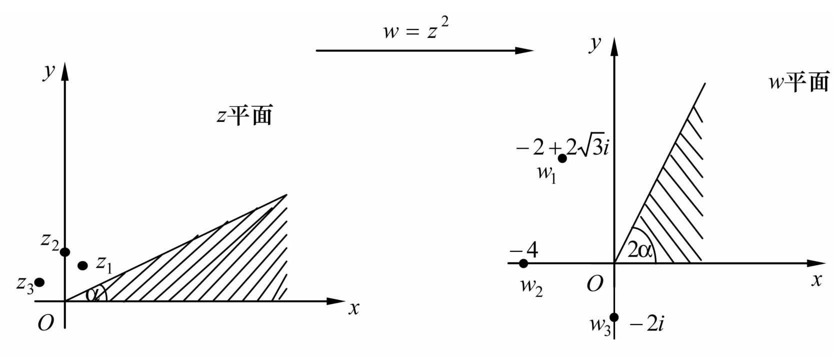

图 1-4-1

(3)设 $z=x+iy$，则 $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$，它对应两个实函数

$$u=x^2-y^2,\ v=2xy\ 。$$

因此，$w=z^2$ 将 z 平面上的双曲线族

$$x^2-y^2=C_1,\ 2xy=C_2$$

分别映射成 w 平面上的两族平行直线

$$u=C_1,\ v=C_2\ 。$$

显然平行直线族 $u=C_1$ 及 $v=C_2$ 是正交的，可证明它们的原象 $x^2-y^2=C_1$ 与 $2xy=C_2$ 在

z 平面上也是正交的(即两曲线在交点处的切线互相垂直).

例 1.4.3　求曲线 $2(x^2+y^2)+3x-4y+1=0$ 在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下的象.

解： 由于 $x+iy=z=\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{u+iv}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}$，

因此

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=\frac{-v}{u^2+v^2},$$

代入所给的曲线方程，得

$$\frac{2}{u^2+v^2}+\frac{3u+4v}{u^2+v^2}+1=0,$$

化简可得所求象曲线为

$$u^2+v^2+3u+4v+2=0.$$

显然其象曲线及其原象都是圆周.

习题 1.4

1. 求下列曲线在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下的象：

(1) $x^2+y^2=4$；　　(2) $y=x$.

2. 已知映射 $w=z^3$，求：

(1)点 $z_1=i, z_2=1+i, z_3=\sqrt{3}+i$ 的象；　　(2)角形域 $0<\arg(z)<\dfrac{\pi}{3}$ 的象.

1.5 复变函数的极限和连续性

1.5.1 复变函数的极限

设 $w=f(z)$ 于点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点，若存在一复数 w_0，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon\quad(z\in\mathbf{E})$，则称 w_0 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记作 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}}f(z)=w_0$ 或 $f(z)\to w_0$（当 $z\to z_0$）.

极限的几何意义是：对于 $\forall\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta>0$，使得当 z 落入 z_0 的去心 $\delta-$邻域时，相应的 $f(z)$ 就落入 w_0 的 $\varepsilon-$邻域．这就说明 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}}f(z)$ 与 $z\to z_0$ 的路径无关. 即不管 z 在 E 上从哪个方向趋于 z_0，只要 z 落入 z_0 的去心 $\delta-$邻域 内，则相应的 $f(z)$ 就落入 w_0 的 $\varepsilon-$邻域 内，而一元实函数中，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 中 x 只能在 x 轴上沿着 x_0 的左、右两个方向趋于 x_0，这正是复变函数与一元实函数不同的根源.

今后为了简便起见，在不致引起混淆的地方，$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}}f(z)$ 均写成 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$. 可以类似于一元实函数中的极限性质，容易验证复变函数的极限具有以下性质：

(1)若极限存在，则极限是唯一的.

(2)关于实变函数极限的和、差、积、商等性质，可以不加改变地推广到复变函数上来.

若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 与 $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，其中 A、B 均为复数，则有

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim_{z\to z_0}f(z)\pm\lim_{z\to z_0}g(z)=A\pm B$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=\lim_{z\to z_0}f(z)\cdot\lim_{z\to z_0}g(z)=AB$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}g(z)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0)$$

另外，对于复变函数的极限与其实部和虚部的极限的关系问题，我们有下述定理：

定理 1.5.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 于点集 E 上有定义，$z_0=x_0+iy_0$ 为 E 的聚点，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\eta=a+ib$ 的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=a$ 及 $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\y\to y_0}}v(x,y)=b$.

证明：因为 $f(z)-\eta=[u(x,y)-a]+i[v(x,y)-b]$

从而由不等式可得 $\left.\begin{array}{l}|u(x,y)-a|\leqslant|f(z)-\eta|\\|v(x,y)-b|\leqslant|f(z)-\eta|\end{array}\right\}$ 即可得必要性部分的证明；

及 $|f(z)-\eta| \leqslant |u(x,y)-a| + |v(x,y)-b|$ 可得充分性部分的证明.

例 1.5.1　证明：当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明：设 $z=x+iy$，则 $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}z}{|z|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，因此

$$u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ v(x,y)=0$$

令 z 沿直线 $y=mx$ 趋于 0，于是有

$$u(x,y)\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{(1+m^2)x^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{(1+m^2)}}$$

显然，它随 m 的变化而变化，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在.

1.5.2　复变函数的连续

设 $w=f(z)$ 在点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点，且 $z_0\in E$，若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 沿 E 于 z_0 连续.

若函数 $f(z)$ 在点集 E 上每一点都连续，则称 $f(z)$ 在 E 上连续，或称 $f(z)$ 为 E 上的连续函数.

$f(z)$ 沿 E 于 z_0 连续就意味着：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

与实函数中的连续函数性质相似，复变函数的连续性有如下性质：

(1)在 z_0 处连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商(分母在 z_0 处不为零)在 z_0 处仍然连续；

(2)若函数 $h=g(z)$ 在 z_0 处连续，$w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

定理 1.5.2 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 于点集 E 上有定义，$z_0\in E$，则 $f(z)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

由上述性质及定理可以看出，复有理多项式函数

$$w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

在整个复平面上连续，而复有理分式函数

$$w=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

在复平面内使分母 $Q(z)\neq 0$ 的点处也是连续的，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是复有理多项式

函数.

与实函数相同,在有界闭集 $\overline{D}$ 上连续的复变函数具有以下性质:

(1)在 $\overline{D}$ 上 $f(z)$ 有界,即 $\exists M>0$,使得 $|f(z)|\leqslant M(z\in\overline{D})$;

(2)在 $\overline{D}$ 上,其模 $|f(z)|$ 有最大值和最小值;

(3) $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上一致连续,即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使对 $\overline{D}$ 上任意两点 z_1, z_2,只要 $|z_1-z_2|<\delta$,就有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

例 1.5.2 求 $\lim\limits_{z\to0}(z+i)$ 的值.

解:由于 $f(z)=z+i$ 在 $z=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{z\to0}(z+i)=i$.

例 1.5.3 设 $f(z)=\dfrac{1}{2i}(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z})\ (z\neq0)$,证明 $f(z)$ 在原点无极限,从而在原点不连续.

证明:设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,则

$$f(z)=\frac{1}{2i}\frac{z^2-\overline{z}^2}{z\overline{z}}=\frac{1}{2i}\frac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})}{r^2}=\sin2\theta$$

因此
$$\lim_{z\to0}f(z)=\begin{cases}0 & \text{当 } z \text{ 沿着正实轴 } \theta=0\to0 \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } z \text{ 沿着 } \theta=\dfrac{\pi}{4}\to0 \text{ 时}\end{cases}$$

故 $\lim\limits_{z\to0}f(z)$ 不存在,从而在原点不连续.

例 1.5.4 设函数 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & z\neq0\\ 0 & z=0\end{cases}$,证明 $f(z)$ 在原点不连续。

证明:设直线 $l:y=mx$,则在直线 l 上

$$f(z)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

因此当 z 沿 l 趋于原点时

$$f(z)\to\frac{m}{1+m^2}$$

当 m 变化时,$\dfrac{m}{1+m^2}$ 即随之变化,所以当 z 沿不同的直线趋向于原点时,$f(z)$ 的极限值就不同。这就证明了 $\lim\limits_{z\to0}f(z)$ 不存在。因而在点 $z=0$ 处,$f(z)$ 不连续。

习题 1.5

1.计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$；　　(2) $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{|z^2|+2\mathrm{Re}(z)+1}{z^2-1}$.

2.证明 $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$ 不存在.

3.试证如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

4.设函数 $f(z)$ 在 z_0 连续且 $f(z_0)\neq 0$，证明可找到 z_0 的小邻域，在这邻域内 $f(z)\neq 0$.

本章小结

本章学习了复数概念、复数运算及其表示；复变函数概念及其极限、连续等内容。由于复数全体与平面上点的全体可一一对应，故一个复数集可视为一个平面点集；由于复数(复函数)的实部与虚部都是实数(实函数)，所以，我们在学习时一定要注意将复数(复函数)与实数(实函数)进行比较，并注意其几何意义，以及复、实函数的异同。特别是复函数的极限、连续性的判定都可以转化为其实部函数与虚部函数的极限与连续性来判定。

学习本章的要点如下：

1.熟练掌握用复数的三角表示式与指数表示式进行运算的技能；掌握根据由给定非零复数 z 在复平面上的位置确定辐角主值的方法；

2.因复数可用平面上的点和向量表示，故应注意掌握用复数形式的方程(或不等式)表示平面图形来解决有关几何问题的方法。例如，向量的旋转即可用该向量所表示的复数乘以一个模为 1 的复数来实现。

3.注意复数和实数的不同点。

(1)复数和实数运算不一样的一个新问题是复数的开方，任一非零的复数总可以开方，而所得的结果是多值的。开 n 次方就有 n 个值。这一点用复数的三角表示式一目了然。

(2)实数能比较大小，但在本课程讲述的范围内复数却不能比较大小。

(3)复数模的概念和实数中绝对值的概念在几何上都是描述点与点之间的距离，两者可统称为绝对值。但由于复数有辐角的概念，故作为复数域中的实数也都有一个辐角(0 或 π)，这显然与实数域中的实数是不同的。

4.正确理解复变函数及与之有关的概念；正确理解区域、单连通区域、多连通区域、简单曲线等概念。

5.能够利用复函数的实部函数与虚部函数来判定复函数的极限与连续性。

总复习题 1

1. 选择题

(1)设复数 z 满足 $\arg(z+2)=\dfrac{\pi}{3}$，则 $z=$（　　）

(A) $-1+\sqrt{3}i$　　(B) $-1-\sqrt{3}i$

(C) $-\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}i$　　(D) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2)当 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ 时，$z^{100}+z^{75}+z^{50}$ 的值等于（　　）

(A) i　　(B) $-i$

(C) 1　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

(3)使得 $z^2=|z|^2$ 成立的复数 z 是（　　）

(A)不存在的　　(B)唯一的

(C)纯虚数　　(D)实数

(4)设 $z=\cos\theta+i\cos\theta$，则 $|z|=$（　　）

(A) 1　　(B) $|\cos\theta|$

(C) $\sqrt{2}|\cos\theta|$　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

(5)函数 $f(z)=\dfrac{z^2+8}{z^3+8}$ 的不连续点的集合元素的个数是（　　）

(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 4

2. 填空题

(1)设 $z=(2-3i)(-2+i)$，则 $\arg z=$ ______；

(2)设 $z=\dfrac{(1+i)(2-i)(3-i)}{(2+i)(3+i)}$，则 $|z|=$ ______；

(3)对于映射 $w=\dfrac{i}{z}$，圆周 $x^2+(y-1)^2=1$ 的像曲线为______；

(4) $\lim\limits_{z\to 1+i}(1+z^2+2z^4)=$ ______；

(5)设 z 为复数，则方程 $z+|\bar{z}|=2+i$ 的解为______.

3. 求下列复数的模与辐角的主值：

(1) $1+i$；　　(2) -3.

4. 证明虚单位 i 有这样的性质：$-i=i^{-1}=\bar{i}$.

5. 把下列复数化为三角表示式和指数表示式：

(1) $-1-\sqrt{3}i$；　　(2) $-2\sqrt{3}+2i$.

6. 证明：

(1) $|z|^2=z\bar{z}$；　　(2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2\neq 0$；

(3) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$；　　(4) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(\bar{z}+z)$, $\mathrm{lm}(z)=\frac{1}{2i}(\bar{z}-z)$.

7. 当一个复数对应的向量按逆时针方向旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 时，对应的复数为 $1+i$，问原复数是多少？

8. 判定下列命题的真假：

(1)若 z 为实数当且仅当 $\bar{z}=z$；　　(2)若 z 为纯虚数当且仅当 $\bar{z}=-z$；

(3) $i<0$；　　(4)零的辐角主值为零；

(5) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

9. 设 $f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)$, $(z\neq 0)$. 试证明当 $z\to 0$ 时 $f(z)$ 的极限不存在.

10. 证明 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续.

第2章　解析函数

本章在复数域中研究复变函数的可导性、可微性、解析性.解析函数是复变函数研究的主要对象,它在理论和实际问题中有着广泛的应用.本章先介绍复变函数的导数和解析函数的概念,然后讨论函数解析的充要条件.最后介绍常用的几个初等函数及其特性,并阐明这些函数都是以指数函数为基础而推得的.

2.1　解析函数的概念

2.1.1　复变函数的导数

复变函数的导数的概念,形式上和实变函数的导数的概念一致.

2.1.1.1　导数的概念

定义 2.1.1 设 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某邻域 U 内有定义,$z_0+\Delta z\in U$,如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,就称函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导,而且这个极限称为 $f(z)$ 在 z_0 处的导数.记为

$$f'(z_0)\text{、}\frac{df}{dz}\Big|_{z=z_0}\text{ 或}\frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_0}$$

即

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

或当 $\Delta z\to 0$ 时,

$$\Delta w=f'(z_0)\Delta z+\rho\Delta z,\ (\rho\to 0)$$

也称 $dw=f'(z_0)\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的微分,故也称 $f(z)$ 在 z_0 处可微.即 $f(z)$ 在 z_0 点可导与在 z_0 点可微是等价的.若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导,则称 $f(z)$ 在 D 内可导.

应当注意,复函数 $f(z)$ 的导数与实函数 $f(x)$ 的导数类似.不同的是实变量 $x\to x_0$,

只是 x_0 的左右方向，而复变量 $z \to z_0$ ($\Delta z \to 0$)是沿任何方向趋于 z_0.

例 2.1.1　求 $f(z)=z^2$ 的导数与微分.

解：由于

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$$

所以

$$f'(z)=2z\,,\ df(z)=2zdz\,.$$

例 2.1.2　问 $f(z)=\bar{z}$ 在复平面上的可导性.

解：对复平面上的任意一点 z，

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}$$

当 $z+\Delta z$ 沿水平($\Delta y=0$)趋于 z 时上式极限为 1；当 $z+\Delta z$ 沿竖直($\Delta x=0$)趋于 z 时上式极限为 -1，所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 不存在，即 $f(z)=\bar{z}$ 在复平面上处处不可导.

2.1.1.2　可导与连续的关系

(1)若函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

如果 $f(z)$ 在 z_0 点可导，令

$$\alpha(\Delta z)=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)$$

那么根据导数定义有　$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0$

由此得

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z \tag{2.1.1}$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}f(z_0+\Delta z)=f(z_0)$$

即 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

(2)连续函数不一定可导.

例 2.1.3　证明函数 $f(z)=x+2yi$ 在复平面上处处连续，但不可导.

证明：由于

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{[(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i]-(x+2yi)}{\Delta x+\Delta yi}$$

若沿着平行于 x 轴方向 $\Delta x\to 0$，则 $\Delta y=0$，这时上式的极限为

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

若沿着平行于 y 轴方向 $\Delta y \to 0$，则 $\Delta x = 0$，这时

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\Delta y i}{\Delta y i} = 2$$

由于极限不唯一，所以 $f(z) = x + 2yi$ 不可导.

可见，在复平面内处处连续的函数并不一定可导.

2.1.1.3　求导法则

由于复变函数的导数定义形式上与微积分中一元函数的导数定义相同，因此微积分中几乎所有的求导基本公式，都可以原封不动地推广到复变函数上来.

(1)$C' = 0$ 其中 C 为复常数；

(2)$(z^n)' = nz^{n-1}$，其中 n 为正整数；

(3)$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$；

(4)$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$；

(5)$[\frac{f(z)}{g(z)}]' = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z) \neq 0$；

(6)$\{f[g(z)]\}' = f'(w) \cdot g'(z)$，其中 $w = g(z)$；

(7)$f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}$，其中 $w = f(z)$，$z = \varphi(w)$ 是两个互为反函数的单值函数，且 $\varphi'(w) \neq 0$.

前面介绍了复变函数在某点的导数，但在复变函数理论中，更重要的是研究函数在某邻域内的导数及其特性，为此下面介绍解析函数.

2.1.2　解析函数的概念

定义 2.1.2 如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内(包含点 z_0)处处可导，则称 $f(z)$ 在点 z_0 解析；如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或说 $f(z)$ 是 D 内的解析函数.

如果 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，则称点 z_0 是 $f(z)$ 的奇点.

注：奇点是不解析的点，而不是不可导的点.

由上述定义可知，函数在一点处解析和一点处可导是两个不同的概念. 若函数在一点处解析，则一定在该点处可导，但反过来不一定成立，因此，函数在某点可导与解析是不等价的. 但是函数在区域内解析与区域内可导是等价的，这是因为区域是开集，其中的点都是内点，区域内每一点可导也意味着每一点解析.

总之，凡是说到函数解析，总是指函数在某个区域上处处有导数. 解析性不是函数在一个孤立点的性质，而是函数在一个区域上的性质.

例 2.1.4　(1) $f(z) = z^2$ 在复平面上处处可导,所以处处解析;

(2) $f(z) = x + 2yi$ 在复平面上处处不可导,当然处处不解析;

(3) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 只在 $z = 0$ 不可导,所以 $f(z)$ 在除 $z=0$ 的复平面上解析;

例 2.1.5　证明:$f(z) = (\mathrm{Re}z)^2$ 在 $z=0$ 点可导,但在该点不解析.

证明:因为
$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{(\mathrm{Re}z)^2}{z} = 0$$
所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 点可导,且 $f'(0) = 0$.

当 $z_0 \neq 0$ 时,设 $z_0 = x_0 + iy_0$,若沿 x 轴方向,则 $\Delta y=0$,即 $\Delta z=\Delta x$.这时
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 \neq 0$$
若沿平行 y 轴方向,则 $\Delta x=0$,即 $\Delta z=\Delta yi$,这时
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 - x_0^2}{\Delta yi} = 0$$
所以在 z_0 点不可导,故 $z = 0$ 不是解析点.

值得注意的是,当 $x_0 = 0$ 时,前一个极限也为0,故在 $z_0 = y_0 i$ 处可导,即在虚轴上的点上可导.

根据求导法则及区域内可导与解析的等价关系,不难证明如下定理:

定理 2.1.1(1)区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析;

(2)设函数 $h = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析,函数 $w = f(h)$ 在 w 平面上的区域 G 内解析,如果对 D 内的每一点 z,函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G,那么复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 D 内解析.

由定理 2.1.1 可知,所有多项式在复平面内是处处解析的,任何一个有理分式函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在不含分母为零的点的区域内是解析的,使分母为零的点是它的奇点.

例 2.1.6　确定函数 $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1}$ 的解析性区域,并求出其奇点.

解:由 $z^2 + 1 = 0$ 得 $z = \pm i$,所以 $f(z)$ 的解析性区域是除点 $z = \pm i$ 的复平面. $z = \pm i$ 是 $f(z)$ 的所有奇点.

习题 2.1

1. 指出下列函数的解析性区域,并在该区域内求出其导数.

(1) $w = 3 - iz + z^2$；　　　　(2) $w = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 5}$.

2. 判断下列命题的真假，并说明理由.

(1) $f(z)$ 在 z_0 解析等价于 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内可导；

(2) z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 必不可导；

(3)如果 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可导，则 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 可导；

(4)函数 $f(z)$ 在区域内解析等价于在区域内可导.

3. 证明函数 $f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在点 $z = 0$ 处不可导.

2.2　函数解析的充要条件

显然，判断一个函数是否解析，仅仅根据导数和解析的定义和性质往往是困难和有限的. 因此，需要寻找判定函数解析的简便方法. 注意到复变函数对应两个二元实变函数，那么能否根据这两个函数的性质来判定函数的可导性和解析性呢？

首先，一个复变函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 对应着两个二元实变函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$，而且 $f(z)$ 在点 $z = x + iy$ 连续等价于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 作为 x,y 的二元函数在点 (x,y) 连续，因此，$f(z)$ 在点 z 是否可微，自然也与 u,v 的性质有关. 现在要问 $f(z)$ 在点 z 可微是否相当于 u,v 在点 (x,y) 可微？上一节例 2.1.3 中的函数 $f(z) = x + 2yi$ 否定了这一结论. 事实上，这个函数的实部 $u = x$ 及虚部 $v = 2y$ 在全平面上处处可微，而复变函数 $f(z) = x + 2yi$ 却处处不可导，那么为使 $f(z)$ 可微，还要对 u,v 添加什么条件呢？下面的定理回答了这个问题.

定理 2.2.1 函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在区域 D 内有定义，它在 D 内一点 $z = x + iy$ 可微的充要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，并且 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 满足柯西—黎曼方程(简称 $C-R$ 方程)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

证明：先证必要性. 设 $f(z)$ 在点 $z = x + iy$ 可微，记 $f'(z) = a + ib$，则由(2.1.1)式有

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= (a + ib)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z \\ &= (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) \\ &= (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(\rho) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

其中 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y,\Delta x$ 及 Δy 是实增量，$\rho=|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

(2.2.1)式两边分别取实部及虚部，就得到

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(\rho) \tag{2.2.2}$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(\rho) \tag{2.2.3}$$

这就是说，二元函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，并且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-b \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=b \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=a$$

从而
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.2.4}$$

再证明充分性，容易看出上述推导是可逆的. 事实上，由于(2.2.4)式成立，且二元函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 可微，从而(2.2.2)式及(2.2.3)式成立，由(2.2.2)式$+i$(2.2.3)式即得(2.2.1)式. 这就证得 $f(z)$在点 z 有导数$a+ib$.

从上面的讨论可见，当定理 2.2.1 的条件满足时，可按下列公式任一来计算 $f'(z)$：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

根据函数在区域内解析与可导的等价关系及定理 2.2.1，可得到下面的定理：

定理 2.2.2 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析(即在 D 内可微)的充要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内可微，并且 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 在 D 内处处满足 $C-R$ 方程.

例 2.2.1 判定下列函数在何处可导，何处解析：

(1) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$；(2) $f(z)=x^2-iy$.

(3) $f(z)=\bar{z}$；(4) $f(z)=(\bar{z})^2$。

解：(1)因为 $u=e^x\cos y$ 及 $v=e^x\sin y$ 在全平面上都有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}，\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $C-R$ 方程处处成立. 所以 $f(z)$ 在复平面上处处可导，处处解析. 并且

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z).$$

(2)因为 $u=x^2$ 及 $v=-y$ 在全平面上都有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x，\frac{\partial u}{\partial y}=0，\frac{\partial v}{\partial x}=0，\frac{\partial v}{\partial y}=-1，$$

由 $C-R$ 方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 得 $x=-\frac{1}{2}$，所以 $f(z)$ 在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上的点处可导，

在复平面上处处不解析.

(3)设 $z=x+iy$,则

$$w=x-iy\ ,\ u(x,y)=x\ ,\ v(x,y)=-y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1\ 。$$

由此可知,对一切点 $z=x+iy$ 都不满足 $C-R$ 方程,因此 $f(z)=\bar{z}$ 处处不可导、处处不解析。

(4)设 $z=x+iy$,则

$$w=(x-iy)^2=x^2-y^2-i2xy\text{ ,于是 }u=x^2-y^2\ ,\ v=-2xy$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y\ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2y\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-2x\ 。$$

由于 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 对一切点 $z=x+iy$ 连续,u,v 在全平面上可微,但满足 $C-R$ 方程的点仅有 $x=y=0$,即 $z=0$。因此 $f(z)=(\bar{z})^2$ 仅在一点 $z=0$ 处可导,在其他点 $z\neq 0$ 处均不可导,故函数 $f(z)=(\bar{z})^2$ 在复平面上处处不解析。

读者还记得,实指数函数 $f(x)=e^x$ 的一个特征性质就是它的变化率等于函数自身,即 $f'(x)=f(x)$.例 2.2.1(1)中所讨论的函数也有这一性质,下一节我们将把这个函数作为复指数函数,并详细研究它.

例 2.2.2 设 $f(z)=ay^3+bx^2y+i(x^3+cxy^2)$ 为复平面内的解析函数,试确定 a,b,c 的值.

解:因为 $u=ay^3+bx^2y$,$v=x^3+cxy^2$,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2bxy\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3ay^2+bx^2\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+cy^2\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2cxy\ .$$

又因为 $f(z)$ 为复平面内的解析函数,所以 $C-R$ 方程处处成立,于是

$$\begin{cases}2bxy=2cxy\\3ay^2+bx^2=-3x^2-cy^2\end{cases}$$

由此解得 $a=1$,$b=-3$,$c=-3$.

例 2.2.3 研究分式线性函数