目 录

第一章　行列式

行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今,它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用,是常用的一种计算工具. 特别是在本门课程中,它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具. 本章主要介绍全排列、逆序数、n 阶行列式的概念、性质、计算方法及克莱姆法则.

§1.1　二阶行列式和三阶行列式

在许多实际问题中,人们常常会遇到求解线性方程组的问题. 我们在初等数学中曾经学过如何求解二元一次方程组和三元一次方程组. 例如,二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x_i(i=1,2)$ 表示未知量,$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 表示未知量的系数,$b_i(i=1,2)$ 表示常数项. 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,用消元法可求得(1.1) 的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

定义 1.1　我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.4}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素. a_{ij} 的下标 i 表示它所在行的序号,称为行标, a_{ij} 的下标 j 表示它所在列的序号,称为列标.

二阶行列式表示的代数和,可以用画线(图 1.1) 的方法记忆,即实线(称为行列式的主对角线) 联结的两个元素的乘积减去虚线(称为行列式的副对角线) 联结的两个元素的乘积,这种方法称为对角线法则.

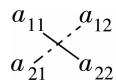

图 1.1

例如,根据定义,(1.1) 的唯一解可以用行列式的形式表示,

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.1) 的唯一解可简单表示为 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2)$.

其中 D 称作方程组(1.1) 的系数行列式, $D_j(j=1,2)$ 就是用方程组的常数列代替系数行列式的第 j 列所得的行列式.

例 1.1 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$

解 计算二阶行列式

$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7,$

$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7, D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14$. 因 $D=-7\neq 0$,故所给方程组有唯一解

$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-7}{-7}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-14}{-7}=2.$

例 1.2 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}$,问:(1) 当 λ 为何值时 $D=0$,(2) 当 λ 为何值时 $D\neq 0$.

解
$$D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & 2\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=\lambda^2\cdot 1-2\cdot\lambda=\lambda^2-2\lambda,$$

令 $\lambda^2-2\lambda=0$，则 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$. 因此可得

（1）当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 时，$D=0$；（2）当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 2$ 时，$D\neq 0$.

对于三元一次方程组有类似的结论. 对于三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{1.5}$$

我们引入三阶行列式的定义.

定义 1.2　我们用记号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\tag{1.6}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为三阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\tag{1.7}$$

三阶行列式的计算遵循如图 1.2 所示的三角形法则.

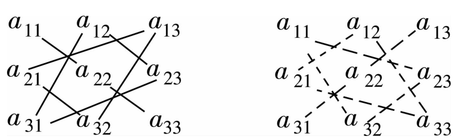

图 1.2

三条实线看做是平行于主对角线的联线，实线上的三个元素的乘积赋予“+”号，三条虚线看做是平行于副对角线的联线，虚线上的三个元素的乘积赋予“−”号.

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq 0$,则方程组(1.5)有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中D称作方程组(1.5)的系数行列式,$D_j(j=1,2,3)$就是用方程组的常数列代替系数行列式的第j列所得的行列式.

例 1.3 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 用三角形法则计算行列式

$D=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)-1\times1\times(-1)=-5.$

例 1.4 求解方程 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$

解 方程左端 $D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6$,

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

例 1.5 解三元线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0,D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为：

$x_1=\frac{D_1}{D}=1$，$x_2=\frac{D_2}{D}=2$，$x_3=\frac{D_3}{D}=1$.

§1.2　全排列及其逆序数

用三角形法则计算行列式，虽然直观，但对于四阶及更高阶行列式，该方法就不适用了.为了求解四元及四元以上的线性方程组，需要把二、三阶行列式的概念进一步推广.为了给出 n 阶行列式的概念，这里引入全排列与逆序数的概念和性质.

定义 1.3　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

n 级排列共有 $n!$ 种.

称排列 $12\cdots n$ 为自然排列.

例如，自然数 1,2,3 构成的不同排列有 $3!=6$ 种，分别是 123,231,312,132,213,321.

定义 1.4　在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

例如，在 3124 这个排列中，构成逆序的数对有 32,31，因此 $\tau(3124)=2$.在 4132 这个排列中，构成逆序的数对有 41,43,42,32，因此 $\tau(4132)=4$.

定义 1.5　逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，321 为奇排列，4132 为偶排列.按照逆序数的定义，计算逆序数有如下思路：按此排列的次序分别算出每个数的后面比它小的数的个数，然后求和.

例 1.6　求下列排列的逆序数，并讨论其奇偶性：

(1)364152；　　　　(2)$n(n-1)\cdots 21$.

解　(1) 在排列 364152 中：

“3”后面有 2 个小于它的数：1、2；

“6”后面有 4 个小于它的数：4、1、5、2；

“4”后面有 2 个小于它的数：1、2；

“1”后面有 0 个小于它的数；

“5”后面有 1 个小于它的数：2；

“2”后面有 0 个小于它的数.

因此，这个排列的逆序数为

$$\tau(364152)=2+4+2+0+1+0=9.$$

这是一个奇排列.

(2) 同理可得：

$$\tau[n(n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易见当 $n=4k,4k+1$ 时,该排列是偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时,该排列是奇排列.

定义 1.6 把一个排列中某两个元素的位置互换,而其余元素的位置不动,就得到一个新的排列,这样从一个排列到另一个排列的变换称为对换,元素 i 与 j 的对换记作 (i,j). 将两个相邻的元素对换,称为相邻对换.

例如,经过(2,3)对换,排列 321 就变成 231,由于 321 是奇排列,而 231 是偶排列,这样施行一次对换改变了 321 排列的奇偶性;又如,经过(1,3)对换,排列 321 就变成 123,由于 321 是奇排列,而 123 是偶排列,这样施行一次对换同样也改变了 321 排列的奇偶性.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的特殊情形. 即排列

$$\cdots\cdots ij\cdots\cdots$$

经相邻对换 (i,j),变成排列

$$\cdots\cdots ji\cdots\cdots,$$

比较上面两个排列的逆序数. 显然,i,j 以外的数彼此间的逆序情况在两个排列中是一样的；i,j 以外的数与 i 或 j 的逆序情况在两个排列中也是一样的. 现在看 i,j,若 $i<j$,则经对换 (i,j) 后,逆序数增加 1,即后一排列的逆序数比前一排列多 1;若 $i>j$,则经对换 (i,j) 后,逆序数减少 1,即后一排列的逆序数比前一排列少 1. 无论哪种情形,都改变了排列的奇偶性. 这就证明了相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般情形. 设排列

$$\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$$

经对换 (i,j),变成排列

$$\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots,$$

容易看出,这一对换 (i,j) 可以通过如下 $2s+1$ 次相邻对换来实现. 即将排列

$$\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$$

经 s 次相邻对换变成如下排列

$$\cdots\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots\cdots,$$

再经 $s+1$ 次相邻对换变成排列

$$\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots,$$

由于每作一次相邻对换便改变排列的奇偶性，而 $2s+1$ 为奇数，因此排列 $\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$ 与排列 $\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots$ 的奇偶性相反. 这就证明了在一般情形下，对换改变排列的奇偶性.

推论 1.1　在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

推论 1.2　奇(偶) 排列变成自然排列的对换次数为奇(偶) 数.

读者可自行证明.

§1.3　n 阶行列式

在引入二阶、三阶行列式的概念以后，二元、三元一次方程组的解可以有简单明了的表示. 所以我们希望把二、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式，并能用行列式把一般的 n 元一次方程组的解表示出来. 下面先研究二、三阶行列式的结构.

观察二阶行列式和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以发现如下的一些规律：

(1) 项数正好是阶数的阶乘：每一项的元素的行标排成自然排列时，列标都是它的某一排列，即二阶行列式的项数为 2!，三阶行列式的项数为 3!；

(2) 每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积；

(3) 带"+" 号和"−" 号的项数各占一半，而且当行标依自然顺序排好以后，其符号与列标排列的逆序数有关，偶排列的带"+" 号，奇排列的带"−" 号. 即三阶行列式带正号的三项的列标排列是 123，231，312，均为偶排列，带负号的三项的列标排列是 132，213，321，均为奇排列.

因此,二阶、三阶行列式可分别写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对 1,2 两个数的所有排列 $j_1 j_2$ 求和, $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和.

根据这个规律,我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.7 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots n)$ 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,简记为 $det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$. 它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和,其值为 $D = \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

或有等价定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

特别地,一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$(注意:这里“| |”不是绝对值).

例 1.7 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

解　因为由行列式的定义知,行列式中不为 0 的项只有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 这一项,且有 $\tau(1234)=0$,即这一项前面的符号为正号,所以

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

例 1.8　计算上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　根据定义 $D = \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,在此行列式中,当 $j_p < p$ 时,元素 $a_{pj_p} = 0$,故在定义式中,可能不为零的项中的任意因子 a_{pj_p} 必须满足关系 $j_p \geqslant p$,即

$$j_1 \geqslant 1, j_2 \geqslant 2, \cdots j_{n-1} \geqslant n-1, j_n \geqslant n$$

同时成立.据此,可从后往前依次推得

$$j_n = n, j_{n-1} = n-1, \cdots j_2 = 2, j_1 = 1,$$

于是,能满足上述关系的列标排列只有一个标准排列 $12\cdots n$,$\tau(12\cdots n)=0$.故有

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

和对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即三角行列式和对角行列式的值都等于主对角线元素的乘积.

例 1.9 用行列式的定义计算 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解 $D_n = (-1)^N a_{1n-1}a_{2n-2}\cdots a_{n-11}a_{nn} = (-1)^N 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot(n-2)\cdot n$

$= (-1)^N n!$,

其中,

$$N = \tau[(n-1)(n-2)\cdots 21n] =$$

$$(n-2)+(n-1)+\cdots+1+0+0 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

所以,$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$.

例 1.10 (填空题)多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中的常数项是__________.

解 用行列式定义考察展开式中不含 x 的非零项.第四列只有(3,4)处没有 x,故必取(3,4)处元素3,第一行必取(1,2)处元素-1,因此可以看出只有(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)处元素的乘积及(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)处元素的乘积为非零常数项,该二项和为

$$(-1)^{\tau(2143)}(-1)\times 2\times 3\times 1+(-1)^{\tau(2341)}(-1)\times 3\times 3\times 1 = -6+9 = 3.$$

§1.4 行列式的性质

用行列式的定义计算行列式,三阶行列式有 6 项,四阶行列式有 24 项,五阶行列式有

120 项 …,行列式的阶数越大,运算量就越大,其增长速度是惊人的.为此,下面将介绍行列式的基本性质,利用这些性质可简化行列式的计算,而且这些性质在行列式的理论研究中也有着非常重要的作用.

定义 1.8 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 的行与列互换,得到一个新的行列式,记为

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D^T 为 D 的转置行列式 .

性质 1.1 行列式与其转置行列式的值相等,即 $D^T=D$.

证 设 $D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

由定义 1.7 知

$$\begin{aligned} D^T &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{1i_1} b_{2i_2} \cdots b_{ni_n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = D. \end{aligned}$$

性质 1.1 说明,行列式中的行与列具有相同的地位,行列式的行具有的性质,它的列也同样具有,反之亦然.

例如 若 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$,则 $D^T=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=D$.

性质 1.2 交换行列式的两行(列),行列式的值变号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 左端 $= \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{pj_p} \cdots a_{qj_q} \cdots a_{nj_n}$,

该展开式中的每一项 $a_{1j_1} \cdots a_{pj_p} \cdots a_{qj_q} \cdots a_{nj_n}$ 也是右端展开式中的项.

现在看项 $a_{1j_1} \cdots a_{pj_p} \cdots a_{qj_q} \cdots a_{nj_n}$ 在右端展开式中应带的符号. 由于交换第 p 行和第 q 行后,a_{pj_p} 在右端行列式中位于第 q 行第 j_p 列;而 a_{qj_q} 则位于第 p 行第 j_q 列,所以这一项 $a_{1j_1} \cdots a_{pj_p} \cdots a_{qj_q} \cdots a_{nj_n}$ 的行标与列标所成的排列分别是

$$1 \cdots q \cdots p \cdots n$$

和

$$j_1 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n.$$

所以 $a_{1j_1} \cdots a_{pj_p} \cdots a_{qj_q} \cdots a_{nj_n}$ 作为右端行列式的展开式中的项,它的前面所带的符号是

$$(-1)^{\tau(1 \cdots q \cdots p \cdots n) + \tau(j_1 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)} = -(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

故有左端 = 右端.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

推论 若行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

性质 1.3 用一个数 k 乘行列式的某一行(列),等于用数 k 乘此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

换句话说,若行列式某行(列)元素有公因子 k,则可以把它提到行列式符号外面.

证　由行列式的定义有

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特别地，当 $k=0$ 时，行列式等于零.

性质 1.4　如果行列式中有两行(列)元素对应成比例，则行列式的值等于零.

证　利用性质1.3可将这两行(列)的比例系数提到行列式的外面，则余下的行列式有两行(列)对应元素相同，由性质1.2可知行列式的值为零.

性质 1.5　如果行列式中某一行(列)的每一个元素都可写成两数之和，则该行列式可以表示成两个相应行列式的和. 即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D_1+D_2$.

证　因为行列式 D 的值为

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+a'_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a'_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= D_1 + D_2,$$

所以 $D = D_1 + D_2$.

例如 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 3+0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

但一般来说下式是不成立的,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 1.6 将行列式中某行(列)的所有元素同乘以数 k 加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.

证 利用性质 1.4 和性质 1.5 可得性质 1.6 的证明.

利用这些性质可简化行列式的计算.今后为表示方便,记 r_i 表示第 i 行,c_j 表示第 j 列. $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示交换 i 行(列)和 j 行(列)的元素;$r_i \times k (c_i \times k)$ 表示第 i 行(列)的元素乘以数 k;$r_i + kr_j (c_i + kc_j)$ 表示第 j 行(列)的元素乘以 k 再加到第 i 行(列)上去.

例 1.11 计算 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解 注意到行列式的各列 4 个数之和都是 6.故把第 2,3,4 行同时加到第 1 行,可提出公因子 6,再由各行减去第一行化为上三角形行列式.

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48.$$

计算行列式常用的一种方法就是运用 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$ 把行列式化为上三角行列式(或下三角行列式),从而算得行列式的值.

例 1.12 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解　根据行列式的特点，可将第 1 列加至第 2 列，然后将第 2 列加至第 3 列，再将第 3 列加至第 4 列，目的是使 D_4 中的零元素增多.

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=4a_1a_2a_3.$$

例 1.13　计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解　从第 4 行开始，后行减前行：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

§1.5　行列式按一行(列)展开

一般来说，计算低阶行列式比计算高阶行列式简单，所以本节将介绍一种降阶法，把高阶行列式化为低阶行列式计算. 为此，首先引入余子式和代数余子式的概念.

定义 1.9　在 n 阶行列式中 $D=det(a_{ij})$，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素划去后

剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素按原来的位置组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如 三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&-4\\1&2&1\end{vmatrix}$$

中元素 a_{31}，a_{33} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{31}=\begin{vmatrix}0&3\\1&-4\end{vmatrix}=-3,A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-3,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&3\\0&-4\end{vmatrix}=-4,A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=4,$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=1.$$

下面讨论将 n 阶行列式转化为 $n-1$ 阶行列式的计算问题.

引理 1.1 如果 n 阶行列式 $D=det(a_{ij})$ 的第 i 行(列)所有元素除 a_{ij} 外都是零，则 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证 (1) 先证 $i,j=1$ 的情形，此时

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

D 中第 1 行除 a_{11} 外，其余的元素全为零，根据行列式的定义有

$$\begin{aligned}D&=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum_{j_1=1}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1\neq1}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},\end{aligned}$$

由于当 $j_1\neq1$ 时，$a_{1j_1}=0$，故

$$\begin{aligned}D&=\sum(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=a_{11}\sum(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}.\end{aligned}$$

(2) 再证一般情形，此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D 中第 i 行除 a_{ij} 外其余的元素都为零. 为了利用(1) 的结果，可将行列进行调换，使得 a_{ij} 位于行列式的左上角. 首先把第 i 行依次与第 $i-1$ 行，第 $i-2$ 行，…，第 1 行作相邻对换，这样就把第 i 行移到第 1 行上，对换的次数为 $i-1$ 次；再把第 j 列依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，…，第 1 列作相邻对换，这样又作了 $j-1$ 次对换，把 a_{ij} 调换到行列式的左上角，总共作了 $i+j-2$ 次对换，根据行列式的性质有

$$D=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1j} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1j} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

利用(1) 的结果得 $D=(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$.

定理 1.2　n 阶行列式 $D=det(a_{ij})$ 等于它的任一行(列) 的各元素与其对应元素的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}(i=1,2,\cdots n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}(j=1,2,\cdots n).$$

证　由行列式的性质知

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & a_{i1}+0+\cdots+0 & \cdots & a_{i1}+0+\cdots+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

根据上述引理 1.1 有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\,(i=1,2,\cdots,n).$$

类似可证

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\,(j=1,2,\cdots,n).$$

此定理称为行列式按行(列)展开法则.在计算上,若直接应用定理 1.2 展开行列式,一般情况并不能减少计算量,除非行列式中某一行(列)含有较多的元素为零.若将 n 阶行列式按第 i 行(列)展开,第 i 行(列)中多一个零元素,就少计算一个 $n-1$ 阶行列式,因此在具体计算时,总是先利用行列式的性质,将某一行(列)元素化成尽可能多的零元素,然后再应用定理 1.2 展开计算.

例 1.14 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}6&0&2\\1&1&2\\9&0&-1\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&2\\9&-1\end{vmatrix}=-6-18=-24.$$

例 1.15 求证 $\begin{vmatrix}1&2&3&4&\cdots&n\\1&1&2&3&\cdots&n-1\\1&x&1&2&\cdots&n-2\\1&x&x&1&\cdots&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x&x&x&\cdots&2\\1&x&x&x&\cdots&1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}.$

证 $D=\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1&1\\0&1-x&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1-x&1&\cdots&1&1\\0&0&0&1-x&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&1\\0&0&0&0&\cdots&1-x&1\\1&x&x&x&\cdots&1&1\end{vmatrix}$

$$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0&0\\1-x&x&0&\cdots&0&0\\0&1-x&x&\cdots&0&0\\0&0&1-x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&0\\0&0&0&\cdots&1-x&1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}.$$

例 1.16 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n}$$（其中未写的元素为 0）.

解 把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行，…，第 2 行对调（作 $2n-2$ 次相邻对换），再把第 $2n$ 列依次与第 $2n-1$ 列，…，第 2 列对调，得

$$D_{2n}=(-1)^{2(2n-2)}\begin{vmatrix} a & b & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \\ c & d & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & a & & & & & b \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ \vdots & \vdots & & & a & b & & \\ \vdots & \vdots & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} d & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ \vdots & & & a & b & & \\ \vdots & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d \end{vmatrix}+c(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ \vdots & & & a & b & & \\ \vdots & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d \end{vmatrix}$$

$$=adD_{2n-2}-bcD_{2n-2}=(ad-bc)D_{2(n-1)}.$$

以此作递推公式，得

$$D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n.$$

例 1.17 证明范德蒙德（*Vandermonde*）行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

而 $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$ 表示所有因子 (x_j-x_i)，$i<j$ 的连乘积，即

$\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)=(x_n-x_1)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_2-x_1)\cdot(x_n-x_2)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_3-x_2)\cdot\cdots(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})\cdot(x_n-x_{n-1})$.

证　对行列式的阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$，结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式结论也成立，即 $D_{n-1}=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i)$. 由 D_n 的最后一行开始，由下而上，依次地用下一行减去上一行的 x_1 倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}.$$

然后依第一列展开，并提取各列元素的公因子，得

$$D_n=(x_n-x_1)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_2-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，根据归纳假定，得

$$D_n=(x_n-x_1)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_2-x_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

行列式的计算方式灵活多样，技巧性也很强. 前面的例题只是给出众多方法中的几种，要想能够熟练计算行列式，必须熟记行列式的性质及按行(列)展开法则，多做习题加以巩固.

定理 1.3　n 阶行列式 $D=det(a_{ij})$ 中某一行(列)的各元素和另一行(列)对应元素的

代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=0(i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i\neq j).$$

证　由于

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

所以当 $i\neq j$ 时,右端行列式中有两行对应元素相同,故行列式等于 0,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j),$$

同理可证

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i\neq j).$$

综合定理 1.2 和 1.3 得到关于代数余子式的重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D & 当\ i=j, \\ 0 & 当\ i\neq j; \end{cases}\quad \sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & 当\ i=j, \\ 0, & 当\ i\neq j. \end{cases}$$

§1.6　克莱姆法则

从三元线性方程组的解的讨论出发,对更一般的线性方程组进行探讨. 本节将应用行列式讨论一类线性方程组的求解问题. 这里只讨论未知量个数和方程个数相等的情形.

设含有 n 个未知量, n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.8}$$

可简写为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,\cdots n$. 其中，$a_{ij}\,(i,j = 1,2,\cdots n)$ 称为方程组的系数，$b_i\,(i = 1, 2,\cdots n)$ 称为方程组的常数项.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组的系数行列式.

定理 1.4 （克莱姆法则）若方程组(1.8)的系数行列式 $D \neq 0$，则它有唯一解，其解为 $x_j = \dfrac{D_j}{D}, j = 1,2,\cdots,n$. 其中 D_j 是用常数项的元素替换 D 的第 j 列所得到的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1,2,\cdots,n. \tag{1.9}$$

证 首先证明 $x_j = \dfrac{D_j}{D}, j = 1,2,\cdots,n$ 是方程组(1.8)的解.

把 $x_j = \dfrac{D_j}{D}, j = 1,2,\cdots,n$ 代入方程组(1.8)的第 i 个方程的左边，再按第 D_j 列展开行列式 D_j，得

$$\begin{aligned} a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j \\ &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj} = \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_s a_{ij}A_{sj} = \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n} b_s\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}, \end{aligned}$$

由定理 1.2 和 1.3 可知

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = \begin{cases} D, & i = s, \\ 0, & i \neq s. \end{cases}$$

所以

$a_{i1}\dfrac{D_1}{D}+a_{i2}\dfrac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\dfrac{D_n}{D}=\dfrac{1}{D}b_i\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\dfrac{1}{D}b_i\cdot D=b_i(i=1,2,\cdots,n)$. 这就证明了 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$ 是方程组(1.8)的解.

再证方程组(1.8)的解惟一.

设方程组(1.8)有另一个解为 $x_1=m_1,\cdots x_j=m_j,\cdots x_n=m_n$. 于是有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}m_j=b_j(i=1,2\cdots,n),$$

分别用 D 中第 j 列的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 依次乘上式中各方程的两端并相加,左端为

$$(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj})m_1+\cdots+(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj})m_j+\cdots+(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj})m_n=D\cdot m_j,$$

右端为 $b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots b_nA_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}b_kA_{kj}=D_j$.

于是 $m_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots n)$ 与 $x_j=\dfrac{D_j}{D},j=1,2,\cdots,n$ 为同一个解,与假设矛盾. 所以 $x_j=\dfrac{D_j}{D},j=1,2,\cdots,n$ 是方程组(1.8)的唯一解.

一般来说,用克莱姆法则求线性方程组的解时,计算量是比较大的. 对具体的数字线性方程组,当未知数较多时往往可用计算机来求解. 用计算机求解线性方程组目前已经有了一整套成熟的方法.

克莱姆法则在一定条件下给出了线性方程组解的存在性、唯一性. 与其在计算方面的作用相比,克莱姆法则更具有重大的理论价值. 克莱姆法则可叙述为下面的定理:

定理 1.4′ 如果线性方程组(1.8)的系数行列式 $D\neq 0$,则(1.8)一定有解,且解是唯一的.

在解题或证明中,常用到定理 1.4′ 的逆否定理:

定理 1.4″ 如果线性方程组(1.8)无解或有两个以上不同的解,则它的系数行列式 D 必为零.

例 1.18 用克莱姆法则求解线性方程组:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3=2,\\ x_1+2x_2=5,\\ 3x_2+5x_3=4.\end{cases}$$

解　因为 $D=\begin{vmatrix}2&3&5\\1&2&0\\0&3&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&0\\3&5\end{vmatrix}=2\times2\times5=20$，

所以 $D\neq0$，由克莱姆法则知方程组有惟一解.

$$D_1=\begin{vmatrix}2&3&5\\5&2&0\\4&3&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0&0\\5&2&0\\4&3&5\end{vmatrix}=(-2)\times2\times5=-20,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&2&5\\1&5&0\\0&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-8&5\\1&5&0\\0&4&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&5&0\\0&-8&5\\0&4&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-8&5\\4&5\end{vmatrix}=60,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&2&5\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&-8\\1&2&5\\0&3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&5\\0&-1&-8\\0&3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-8\\3&4\end{vmatrix}=-20.$$

故方程组的解为，

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-1,x_2=\frac{D_2}{D}=3,x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

例 1.19　设曲线 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 通过四点(1,3)、(2,4)、(3,3)、(4,−3)，求系数 a_0,a_1,a_2,a_3.

解　把四个点的坐标代入曲线方程，得线性方程组

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_2+a_3=3,\\a_0+2a_1+4a_2+8a_3=4,\\a_0+3a_1+9a_2+27a_3=3,\\a_0+4a_1+16a_2+64a_3=-3.\end{cases}$$

其系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&18&64\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1=12$，

而 $D_1=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\4&2&4&8\\3&3&9&27\\-3&4&16&64\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-2&2&2&4\\-6&3&6&18\\-15&4&12&48\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2&2&4\\-6&6&18\\-15&12&48\end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 18 \\ -3 & 12 & 48 \end{vmatrix}=-(-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}=36;$$

类似地,计算得:

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 16 & 64 \end{vmatrix}=-18;\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -3 & 27 \\ 1 & 4 & 3 & 64 \end{vmatrix}=24;$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & -3 \end{vmatrix}=-6.$$

故由克莱姆法则,得惟一解

$$a_0=3, a_1=-\frac{3}{2}, a_2=2, a_3=-\frac{1}{2},$$

即曲线方程为

$$y=3-\frac{3}{2}x+2x^2-\frac{1}{2}x^3.$$

例 1.20 设方程组 $\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2, \\ bcx+cay+abz=3abc. \end{cases}$ 试问 a,b,c 满足什么条件时，方程组有惟一解，并求出惟一解.

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ c(b-a) & a(c-b) & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ -c & -a & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -c & -a \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a).$$

显然,当 a,b,c 互不相等时,$D\neq 0$,该方程组有惟一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 1 \\ a^2+b^2+c^2 & b & c \\ 3abc & ca & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a^2 & b & c \\ abc & ca & ab \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=aD.$$

同理可得 $D_2=bD, D_3=cD$，于是

$$x=\frac{D_1}{D}=a, y=\frac{D_2}{D}=b, z=\frac{D_3}{D}=c.$$

定义 1.10　若方程组(1.8)的右边的常数 b_i 都为零，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{1.10}$$

则称它为**齐次线性方程组**，而把方程组(1.8)称为**非齐次线性方程组**.

显然，齐次方程组总有解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 就是一组解，我们称它为零解. 若一组解 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 不全为零，则称为非零解. 现在要讨论齐次线性方程组(1.10)除了零解外，是否还有非零解. 若齐次线性方程组(1.10)的系数行列式 $D\neq 0$，因 D_j 中有一列为零，故 $D_j=0, x_j=\frac{D_j}{D}=0, I=1,2,\cdots n$. 从而齐次线性方程组(1.10)仅有零解. 于是有如下等价的结论：

定理 1.5　如果齐次线性方程组(1.10)有非零解，则 $D=0$.

证　假设齐次线性方程组(1.10)的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组(1.10)仅有零解，这与齐次线性方程组(1.10)有非零解矛盾. 所以，$D=0$.

推论 1.3　如果齐次线性方程组(1.10)的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组(1.10)没有非零解.

例 1.21　问 λ 为何值时，齐次方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$ 有非零解？

解

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3+(\lambda-3)-4(1-\lambda)-2(1-\lambda)(-3+\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3=\lambda(\lambda-2)(3-\lambda),$$

齐次线性方程组有非零解,则 $D=0$,所以 $\lambda=0$,$\lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时齐次线性方程组有非零解.

习题一

(A 组)

1.计算下列各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性:

(1)421563;　(2)217986354;　(3)763241589;　(4)987654321.

2.在 1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成的下列排列中,选择 i 和 j,使得:

(1)$38i417j95$ 为奇排列;　(2)$512i794j6$ 为偶排列.

3.判断下列各乘积是否是四阶行列式的展开式中的项?若是,试确定该项所带的正负号.

(1)$a_{11}a_{24}a_{32}$;(2)$a_{12}a_{23}a_{33}a_{41}$;(3)$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$;(4)$a_{31}a_{24}a_{12}a_{43}$.

4.设行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=3$,$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & 5a_{11}+2a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 5a_{21}+2a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & 5a_{31}+2a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$,则 D_1 的值为多少?

5.求行列式 $\begin{vmatrix}-3 & 0 & 4\\ 5 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}$ 中元素 2 和 -2 的代数余子式.

6.已知四阶行列式 D 中第三列元素依次为 $-1,2,0,1$,它们的余子式依次分别为 $5,3,-7,4$,求 $D=$?

7.用行列式的定义计算下列行列式:

(1)$\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d & f \\ 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix}$；　　(2)$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

8. 计算下列行列式：

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2)$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

9. 设 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，试给出 $D>0$ 的充分必要条件.

10. 求一个二次多项式 $f(x)$，使 $f(1)=0$，　$f(2)=3$，　$f(-3)=28$.

11. 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

反对称行列式为下列形式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

其特点是元素 $a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j)$，$a_{ii}=0(i=j)$.

12. 计算下列行列式：

(1)$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$；　　(2)$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $D=\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；(4) $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；

(5) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

(6) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

13. 证明下列等式：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ u+v & v+w & w+u \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}=a_1+a_2+\cdots+a_n+1$；

(4) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$.

14. 用克莱姆法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -6, \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 10, \\ 12x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 12, \\ 9x_1 - 2x_3 + x_4 = 12; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 = 1, \\ 8x_1 + 27x_2 + 64x_3 + 125x_4 = 1. \end{cases}$

15.有甲、乙、丙三种化肥，甲种化肥每千克含氮 70 克，磷 8 克，钾 2 克；乙种化肥每千克含氮 64 克，磷 10 克，钾 0.6 克；丙种化肥每千克含氮 70 克，磷 5 克，钾 1.4 克.若把此三种化肥混合，要求总重量 23 千克且含磷 149 克，钾 30 克，问三种化肥各需多少千克?（用克莱姆法则求解）

16.某工厂有 3 个车间，各车间互相提供产品，今年各车间出厂产量及对其他车间的消耗如表 1－1.表中第一列消耗系数 0.1、0.2、0.5 表示第一车间生产 1 万元的产品需分别消耗第一、二、三车间 0.1 万元、0.2 万元、0.5 万元的产品，第二列、第三列类同，求今年各车间的总产量.

表 1－1

消耗系数 车间 ＼ 车间	1	2	3	出厂产量（单位：万元）	总产量（单位：万元）
1	0.1	0.2	0.45	22	x_1
2	0.2	0.2	0.3	0	x_2
3	0.5	0	0.12	55.6	x_3

17.问齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解时，a，b 必须满足什么条件?

18. 判定齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \end{cases}$ 是否仅有零解？

19. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_4=0, \\ x_1+2x_2-x_4=0, \\ (k+2)x_1-x_2+4x_4=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+kx_4=0 \end{cases}$$

有非零解，问 k 应满足什么条件？

（B 组）

1. 求下列排列的逆序数：

(1) $(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot(n-1)n\ (n\geqslant 3)$；

(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

2. 用定义计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{n+2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3. 设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，求第一行各元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

4.设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$,求 $f(x)$ 中 x^2 的系数.

5.四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值是多少?

6.设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=d$,求 $\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix}$ 的值.

7.计算行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

8.不计算行列式的值,证明 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 能被 18 整除.

9.设 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & f \\ b_1 & b_2 & b_3 & f \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \\ d_1 & d_2 & d_3 & f \end{vmatrix}$,求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$,其中 $A_{i1}(i=1,2,3,4)$ 为 D 中元素 a_{i1} 的代数余子式.

10. 已知 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&2&1&4&6\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27$，

求：(1)$A_{41}+A_{42}+A_{43}$；

(2)$A_{44}+A_{45}$. 其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 是 D 中第 4 行第 j 列元素的代数余子式.

11. 证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&x+a_1\end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

12. 证明行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2\cos\alpha&1&0&\cdots&0&0\\1&2\cos\alpha&1&\cdots&0&0\\0&1&2\cos\alpha&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2\cos\alpha&1\\0&0&0&\cdots&1&2\cos\alpha\end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

13. 求通过三点 $A(1,1,2)$，$B(3,-2,0)$，$C(0,5,-5)$ 的平面方程.

习题一答案

(A 组)

1. (1)$\tau(421563)=6$，偶；

(2)$\tau(217986354)=18$，偶；

(3)$\tau(763241589)=15$，奇；

(4)$\tau(987654321)=36$，偶.

2. (1)$i=6$，$j=2$；(2)$i=3$，$j=8$.

3.(1) 不是;(2) 不是;

(3) 是,$(-1)^{\tau(1324)}=(-1)^1=-1$;

(4) 是,$(-1)^{\tau(2413)}=(-1)^3=-1$.

4.6.

5.$A_{31}=0, A_{32}=29$.

6.-15.

7.(1)$abef$;　　(2)$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

8.(1)36;　　(2)$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

9.$a>1$ 或 $a<-1$.

10.$f(x)=2x^2-3x+1$.

11.提示:$D=|A|=(-1)^n|A^T|=-|A|\Rightarrow D=0$.

12.(1)40;　(2)160;　(3)$4adfbce$;　(4)$abcd+ab-ad+cd+1$;

(5) 提示:将 D_{n+1} 的第 $n+1$ 行依次换到第1行,第 n 行依次换到第2行,…;同时,将 D_{n+1} 的第 $n+1$ 列依次换到第1列,第 n 列依次换到第2列,…,再由范德蒙德行列式可得 $D_{n+1}=n!\cdot(n-1)!\cdots2!=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j)$;(6)$a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$.

13.略

14.(1)$x_1=\frac{1}{2}, x_2=1, x_3=-\frac{1}{2}$;

(2)$x_1=1, x_2=0, x_3=-1, x_4=1$;

(3)$x_1=4, x_2=-6, x_3=4, x_4=-1$.

15.3,5,15.

16.100, 70, 120.

17.$a=0$ 或 $b=1$.

18.系数矩阵行列式为 $D=-153\neq0$,故仅有零解.

19.提示:方程组的系数行列式为 $D=-3(5k-5)$,如果齐次线性方程组有非零解,则 $D=0$,得到 $k=1$.

(B 组)

1.(1) $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$;(2) $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.$(-1)^{\tau[2n\cdot(2n-1)\cdots(n+1)\cdot1\cdot2\cdots n]}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{2n}=(-1)^{n^2+\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{2n}$.

3. $n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$.

4. 提示：$a_{11}a_{44}\begin{vmatrix}2 & 3\\10 & 4\end{vmatrix}+a_{11}a_{24}\begin{vmatrix}10 & 4\\-7 & 1\end{vmatrix}=16x^2$，所以，$x^2$ 系数为 16.

5. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

6. $6d$.

7. (1) 提示：将各列加到第一列，提出公因式，再对角化，得 $-x^4$；(2) 提示：把行列式按第一列展开，再把展开后的行列式化成三角或二阶行列式，得 x^2y^2；(3) 提示：先把行列式各列加到第一列，再按第一列展开，得递推关系式 $D_5=D_4-(-1)^{5+1}a^5$，得 $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

8. 提示：利用行列式性质.

9. 提示：(1) 当 $f=0$ 时，根据代数余子式定义，$A_{i1}=0(i=1,2,3,4)$，所以 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$；(2) 当 $f\neq 0$ 时，由行列式的展开定理得 $fA_{11}+fA_{21}+fA_{31}+fA_{41}=0\Rightarrow f(A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41})=0\Rightarrow A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$.

10. $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9, A_{44}+A_{45}=18$.

11. 提示行列式按第一列展开得递推公式 $D_n=xD_{n-1}+a_n$.

12. 提示：数学归纳法.

13. 提示：设平面方程 $ax+by+cz+d=0$，将 A,B,C 坐标代入该方程，并设 x,y,z 是平面上任意一点，得以 a,b,c,d 为未知量的四元齐次线性方程组，因 a,b,c,d 不全为零，即方程组有非零解，即系数行列式为 0，计算的平面方程为 $29x+16y+5z-55=0$.