目　　录

预备知识

微积分研究的主要对象是函数.研究函数通常有两种方法:一种方法是代数方法和几何方法的综合.用这种方法常常只能研究函数的简单性质,有的做起来很复杂.初等数学中就是用这种方法来研究函数的单调性、奇偶性、周期性的;另一种方法就是微积分的方法,或者说是极限的方法.用这种方法能够研究函数的许多深刻性质,并且做起来相对简单.微积分就是用极限的方法研究函数的一门学问.因此,在介绍微积分之前,有必要先介绍函数的概念和有关知识.

一、集合

1.集合的概念

在数学中,我们把具有某种特定性质的事物所组成全体称为一个集合(或简称集).组成这个集合的事物称为该集合的元素.

习惯上,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.一个集合,若其元素的个数是有限的,则称作有限集,否则就称作无限集;不含任何元素的集合称为空集,记作 Φ.

集合的表示方法有两种:列举法和描述法.列举法就是把集合中的所有元素一一列出来,写在一个花括号内.如 $A=\{-1,1\}$,$B=\{0,1,2\}$ 等.描述法就是在花括号内指明该集合中的元素所具有的确定性质.如 $C=\{x\,|\,x^2-1\geqslant 0\}$,$D=\{x\,|\,\sin x=0\}$ 等.

一般,用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集,用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集,用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集,用 R 表示实数集.

对于集合 A 和 B,若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素,即若 $a\in A$,则 $a\in B$,这时就称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$,读作"A 含于 B"(或"B 包含 A").若 $A\subset B$,且存在 $b\in B$,使得 $b\notin A$,则称 A 是 B 的一个真子集.

规定:Φ 是任何集合 A 的子集,即 $\Phi\subset A$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A,B 相等,记作 $A=B$.此时 A 中的元素都是 B 中的元素,反过来,B 中的元素也都是 A 中的元素,即 A,B 中的元素完全一样.

2.集合的运算

设 A 和 B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$;由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$;由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集,记作 $A\backslash B$.有时我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体叫作全集,记作 I,并把差集 $I\backslash A$ 特别称为 A 的余集或补集,记作 A^c.

集合的并、交、余运算满足如下运算律：

交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义直积. 设 A 、B 是任意两个集合，则 A 与 B 的直积，记作 $A\times B$，定义为如下的由有序对 (a,b) 组成的集合：

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}.$$

例如，$R\times R=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xoy 面上全体点的集合，$R\times R$ 常记作 R^2. 两个闭区间的直积表示 xoy 平面上的矩形区域，例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)|x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即为 xoy 平面上的一个矩形区域，其相邻两边各自平行于 x 轴与 y 轴，并且在 x 轴与 y 轴上的投影分别为区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$.

3. 区间与邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，记 $(a,b)=\{x|a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为开区间；记 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为闭区间；记 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左闭右开区间；记 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为左开右闭区间；$a,b$ 称为区间的左端点和右端点.

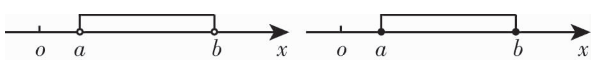

图 1

另外，还记 $(-\infty,+\infty)=R,(-\infty,b)=\{x|x<b,x\in\mathbf{R}\},(a,+\infty)=\{x|x>a,x\in\mathbf{R}\}$，等等.

定义 1　以 a 为中心的开区间 $(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$ 称为 a 的 δ 邻域，δ 称为此邻域的半径，如图 2 所示，通常记作 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\},$$

或写作

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\},$$

而 $\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，称为 a 的去心 δ 邻域.

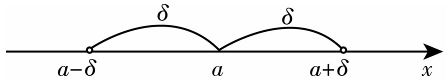

图 2

二、函数

1.概念

定义 2　设 D 是一个非空实数集合，若存在一个法则，按照此法则，对于每一个实数 $x\in D$ 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D$$

D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量，y 与 x 的对应关系 f 称为函数关系.

一般来说，函数的定义域是由所考虑问题的实际意义确定的.但在数学上作一般讨论时，常常只给出函数的表达式，而没有说明实际背景，这时函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的变化范围.如 $y=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x(x+2)}$ 的定义域就是 $|x|>1$ 且 $x\neq-2$.

函数完全由对应法则和定义域所确定.两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数相同.如两函数 $f(x)=x^2+1$，$g(t)=t^2+1$ 是同一个函数；而 $y=\dfrac{x^2}{x}$，$g(x)=x$ 就不是同一个函数，因为它们的定义域不同，前者是 $x\neq 0$，后者是 $x\in(-\infty,+\infty)$.

下面介绍几种特殊的函数：

例 1　常数函数

$y=3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{3\}$.

例 2　绝对值函数

$y=|x|$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$.

例 3　取整函数

设任意实数 x，记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，称 $f(x)=[x]$ 为取整函数，它的定义域是 R，值域是整数集，如图 3.如 $[3.2]=3$，$[-2.3]=-3$，$[2]=2$.

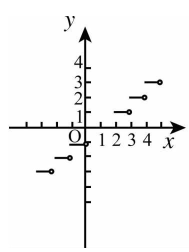

图 3

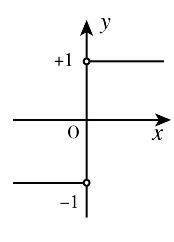

图 4

例 4　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

，定义域是 R，值域是 $\{-1,0,1\}$.如图 4，该函数也是一个分段函数.

2.复合函数及反函数

定义 3 若 $y=f(u)$ 的定义域为 U，而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 U^*，且 $U\cap U^*\neq\Phi$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，称它为由 $f(u)$，$\varphi(x)$ 构成的复合函数，记作 $f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

注意，函数经复合后，其自然定义域未必是中间函数的自然定义域，如函数 $y=\arcsin x^2$ 可看做由 $y=\arcsin u$，$u=x^2$ 复合而成，但是 $u=x^2$ 的自然定义域是 $(-\infty,+\infty)$，相应的值域

$[0,+\infty)$ 并没有完全包含在 $y=\arcsin u$ 的自然定义域 $[-1,1]$ 内，只有当 $u=x^2$ 的自变量 x 在 $D=[-1,1]$ 内取值时，u 的对应值才属于 $y=\arcsin u$ 的定义域，因此复合函数 $y=\arcsin x^2$ 的定义域是 $D=[-1,1]$. 还要注意两个函数能够复合的条件，例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为表达式 $y=\arcsin(2+x^2)$ 对任何实数都没有意义.

例 5　设 $f(x)=\ln x, g(x)=\sin x$，求 $f[g(x)]$.

解 将 $f(x)$ 中的 x 用 $g(x)$ 来代替，得 $f[g(x)]=\ln(\sin x)$.

例 6　设 $f(x)=\ln(x-2), g(x)=\sin x$，求 $f[g(x)]$.

解　将 $f(x)$ 中的 x 用 $g(x)$ 来代替，得 $f[g(x)]=\ln(\sin x-2)$，但由于 $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$，所以 $\sin x-2<0$，故函数的定义域为空集，所以不能构成复合函数.

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 W. 若对每个 $y\in W$，存在唯一的 $x\in D$，它所确定的由 y 到 x 的函数称为 f 的反函数，记作 f^{-1}. 即 $x=f^{-1}(y)(y\in W)$；或者称 f，f^{-1} 互为反函数.

容易证明，若 $f(x)$ 为定义在 D 上的单调函数，则 $f(x)$ 是从定义域 D 到值域 $f(D)$ 的一一映射，其反函数必定存在，且 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 有相同的单调性. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标平面上是关于直线 $y=x$ 对称的.

3. 函数的基本性质

单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对任意 $x_1, x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，若有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是单调递增的；反之，若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是单调递减的. 单调递增和单调递减统称为单调，若去掉“等号”，则称为严格单调.

奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数；而若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的奇函数.

奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称.

有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 M，使得对任意的 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 内有界，或称 $f(x)$ 在 D 内为有界函数；否则称 $f(x)$ 在 D 内为无界函数.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在数 A，使得对任意的 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant A$（或 $f(x)\geqslant A$）成立，则称 $f(x)$ 在 D 内有上界(或下界)，A 称为一个上界(或下界).

函数有界的充要条件是函数既有上界又有下界；界不唯一.

周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T\neq 0$，使得对任意的 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

4. 基本初等函数

定义 5　常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

(1)幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$，α 是常数，定义域与 α 有关. α 为正整数时，定义域为 R；而 α 为负整数时，定

义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；$\alpha=\dfrac{1}{n}$，$n$ 为正整数，若 n 为奇数，定义域为 R，n 为偶数，定义域为 $[0,+\infty)$，等等.（见图 5）

(2)指数函数

指数函数 $y=a^x\ (a>0,a\neq1)$，定义域为 R，值域为 $(0,+\infty)$，图形都经过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减少. 指数函数的图像均在 x 轴上

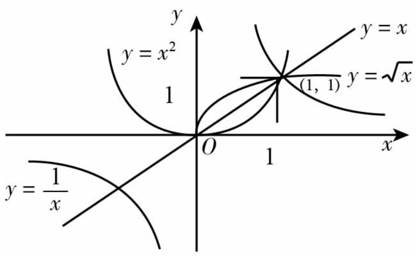

图 5

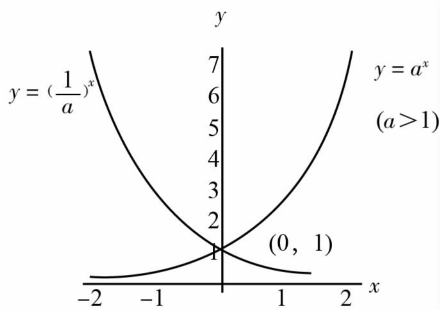

图 6

方，由于 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$，所以 $y=a^x$ 的图形与 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图形是关于 y 轴对称的（见图 6）. 经常用的是 $y=e^x$，其中 $e=2.718281828459\cdots$.

(3)对数函数

对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，故由原函数与反函数的关系知，对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 R，图形经过点 $(1,0)$，当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调减少. 对数函数的图形均在 y 轴的右方（见图 7）. 常用的对数函数是 $y=\ln x$，即当 $a=e$ 时，称为自然对数.

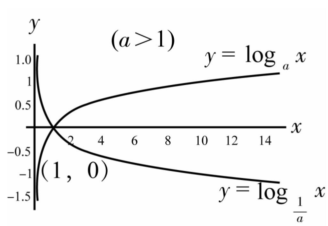

图 7

(4)三角函数

正弦和余弦函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，定义域为 R. 正切和正割函数 $y=\tan x$，$y=\sec x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 而余切和余割函数 $y=\cot x$，$y=\csc x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 其中 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.（见图 8）

(5)反三角函数

反三角函数是各三角函数的在其特定的单调区间上的反函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，（见图 9 的第 1 个图）.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数. 其定义域为

$[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，(见图 9 的第 2 个图).

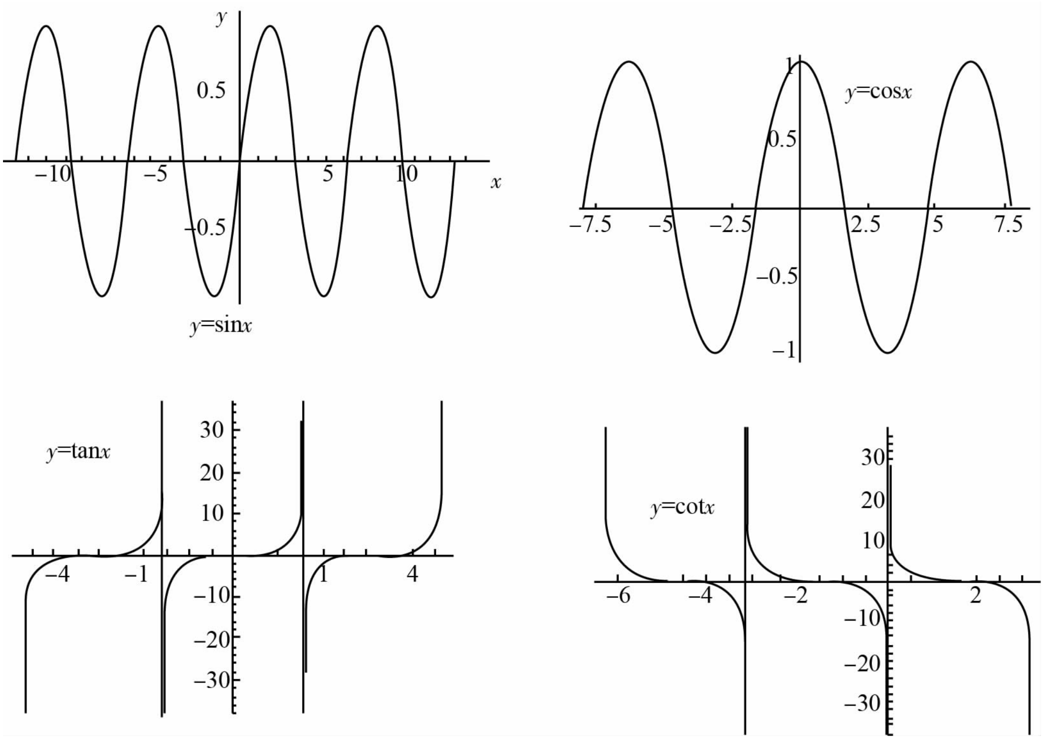

图 8

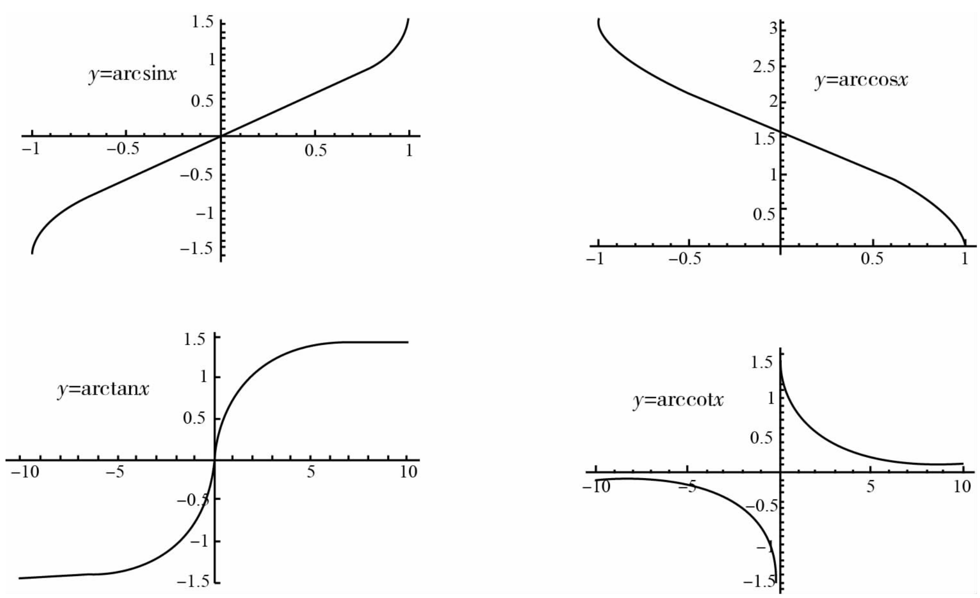

图 9

反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数.其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，(见图 9 的第 3 个图).

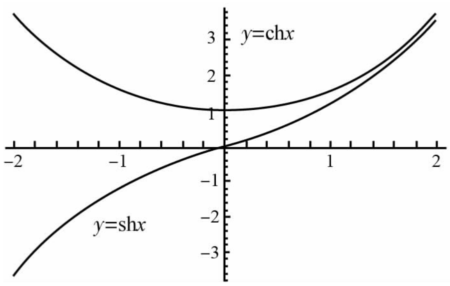

图 10

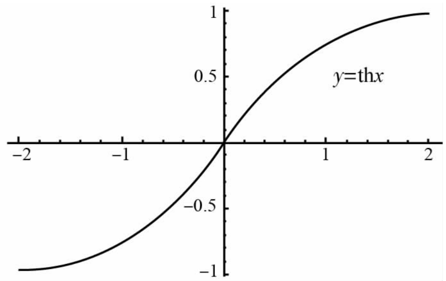

图 11

反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 是余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的反函数.其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，(见图 9 的第 4 个图).

5.初等函数

定义 6　由上述基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的,并可以用一个算式表示的函数统称为初等函数.例如，$y=\sqrt{x^2+1}$，$y=e^{\frac{1}{1-x}}$ 等都是初等函数，在本课程中讨论的函数基本上都是初等函数.

介绍常用到的一类初等函数，即双曲函数及其反函数.

(1)双曲正弦 $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，定义域和值域都是 R，它是 R 上的增加的奇函数.(见图 10)

(2)双曲余弦 $y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域是 R，值域是 $[1,+\infty)$，它是偶函数并在区间 $(-\infty,0)$ 上减少，在 $(0,+\infty)$ 上增加.(见图 10)

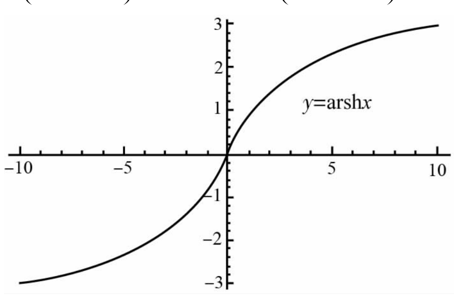

图 12

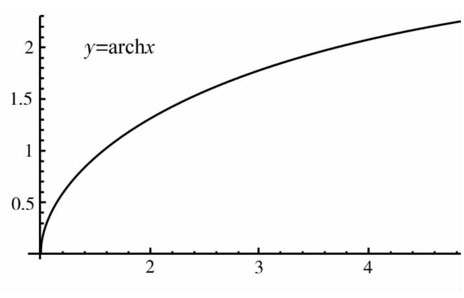

图 13

(3)双曲正切 $y=\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，定义域是 R，它是 R 上的增加的奇函数，它的图形夹在直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间.(见图 11)

(4)反双曲正弦 $y=\operatorname{arsh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是双曲正弦的反函数,定义域是 R,它是 R 上的增加的奇函数.(见图 12)

(5)反双曲余弦 $y=\operatorname{arch}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ 是双曲余弦的反函数,定义域是 $[1,+\infty)$,值域是 $[0,+\infty)$,并在定义域上是增加的.(见图 13)

(6)反双曲正切 $y=\operatorname{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 是双曲正切的反函数,定义域是 $(-1,1)$,它在定义域上是增加的奇函数.(见图 14)

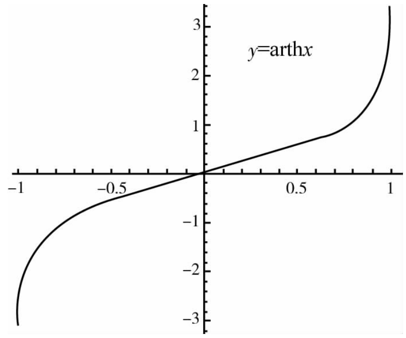

图 14

习题

1.求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\arcsin(1-x)+\ln(\ln x)$;

(3) $y=1-e^{1-x^2}$;　　(4) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x-1, & 1<|x|<2\end{cases}$.

2.判断下列函数 f 与 g 是否相同:

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x},g(x)=1$;　　(2) $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$.

3.设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$,求 $f(f(x))$.

4.设 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 内有定义,试证明:

(1) $f(-x)+f(x)$ 为偶函数;　　(2) $f(-x)-f(x)$ 为奇函数.

5.下列初等函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt[3]{\arcsin a^x}$;(2) $y=\sin^3\ln x$;(3) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$.

6.求下列函数的表达式:

(1)设 $f(\sin x)=\cos^2 x+\sin x+5$,求 $f(x)$;

(2)设 $g\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $g(x)$.

7.讨论下列函数的奇偶性:

(1) $y=x+x^2-x^3$;　　(2) $y=a+b\cos x$;

(3) $y=x+\sin x+e^x$;　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

第 1 章　极限与连续

微积分是一门以变量作为研究对象、以极限方法作为基本研究手段的数学学科. 应用极限方法研究各类变化率问题和几何学中曲线的切线问题，就产生了微分学；应用极限方法研究诸如曲边图形的面积等涉及到微小量无穷积累的问题，就产生了积分学. 可以说，整个微积分是建立在极限理论的基础之上的.

在本章中我们将介绍极限的概念、性质和运算法则；介绍与极限概念密切相关、且在微积分运算中扮演重要角色的无穷小量；我们还将求得两个应用广泛的重要极限. 后半部分将通过极限引入函数的一类重要性质—连续性.

1.1　数列的极限

1.1.1　数列的概念

定义 1.1　设 $x_n = f(n)$ 是一个以正整数集为定义域的函数，将其函数值 x_n 按自变量 n 的大小顺序排成一列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为一个数列. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项. 数列一般记为 $\{x_n\}$ 或 $x_n = f(n)$.

例如：

(1)数列 $1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \cdots, 1+\frac{1}{n}, \cdots$，记作 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$，一般项为 $x_n = 1+\frac{1}{n}$；

(2)数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$，记作 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，一般项为 $x_n = \frac{1}{2^n}$；

(3)数列 $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$，记作 $\{(-1)^{n+1}\}$，一般项为 $x_n = (-1)^{n+1}$；

(4)数列 $1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots$，记作 $\{n^2\}$，一般项为 $x_n = n^2$.

1.1.2　数列的极限

我们要研究当 $n \to \infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势是什么？特别地，x_n 是否无限地接近某个常数？即我们以前学习过的数列极限的问题.

观察上述 4 个例子，其中前两个数列当 $n \to \infty$ 时都接近于某个常数，$1+\frac{1}{n}$ 接近于 1，$\frac{1}{2^n}$ 接近于 0，此时称 1 和 0 分别为数列 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 和 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的极限；而后两个数列不具备此特点.

现在以上面的数列 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 来分析，看看 x_n 与常数 1 之间存在着怎样的数量关系.

由于 $|x_n-1|=x_n-1=\frac{1}{n}$，因此随着 n 的不断增大，$|x_n-1|$ 可以无限地变小，从而 x_n 可无限地接近于1.

例如，如果指定一个小正数，例如 $\frac{1}{10^2}$，要使 $|x_n-1|<\frac{1}{10^2}$，只要 $n>100$，即从第101项起以后的一切项均能满足 $|x_n-1|<\frac{1}{10^2}$；而如果再指定一个小正数 $\frac{1}{10^4}$，要使 $|x_n-1|<\frac{1}{10^4}$，只要 $n>10000$，即从第10001项起以后的一切项均能满足 $|x_n-1|<\frac{1}{10^4}$；一般地，如果指定正数为 $\frac{1}{10^k}$，要使 $|x_n-1|<\frac{1}{10^k}$，那么只要 $n>10^k$，即从第 10^k+1 项开始以后的一切项均能满足 $|x_n-1|<\frac{1}{10^k}$.

由此可见，不论事先指定一个多么小的正数，都能达到要求，我们引入 ε 来表示这样一个任意小的正数，无论它多么小，要使 $|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，即从第 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 项以后的一切项均能满足 $|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$. 也就是在 n 无限增大的变化过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻之后，总有 $|x_n-1|$ 小于事先指定的正数 ε，因为 ε 是任意小的，所以数列 $\{x_n\}$ 无限接近于常数1，此时我们就称数列 $\{x_n\}$ 以常数1为极限.

推广到一般数列，给出数列极限的定义如下：

定义1.2　设 $\{x_n\}$ 是一个数列，A 是一个常数，若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，都有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{，或 } x_n\to A\ (n\to\infty).$$

此时也称数列 $\{x_n\}$ 的极限存在. 否则，称 $\{x_n\}$ 的极限不存在，或称 $\{x_n\}$ 发散.

对于该定义需要注意以下几点：

(1) ε：是预先给定的任意小的正数，要多小就有多小，其小的程度没有限制，只有这样，不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 才能表达出“不论你要 x_n 多么接近于 A”的要求，它刻画了 x_n 与 A 的接近程度；

(2) N：是依赖于 ε 的给定而确定的，随着 ε 的变化而变化，它指出了一个位置，只要 n 增大的过程到达这一步以后，就有 $|x_n-A|<\varepsilon$，即实现了“x_n 接近于 A”，而且它是不唯一的.

(3) 数列极限的几何意义（见图1－1）

由于 $|x_n-A|<\varepsilon$ 就表示 $x_n\in(A-\varepsilon,A+\varepsilon)=U(A,\varepsilon)$. 因此，从集合上看，$x_n\to A\ (n\to\infty)$ 就是对以 A 为中心，以任意小的正数 ε 为半径的邻域 $U(A,\varepsilon)$，总能找到一个 N，从第 $N+1$ 项开始，以后的各项（无限多项）都落在邻域 $U(A,\varepsilon)$ 内，而在 $U(A,\varepsilon)$ 外，至多有 N 项（有限项）. 由于半径 ε 可任意小，而邻域 $U(A,\varepsilon)$ 中总有无穷多个 x_n 中的点，可以想象，x_n 中的点“凝聚”在点 A 的附近，所以也称 A 为 $\{x_n\}$ 的聚点.

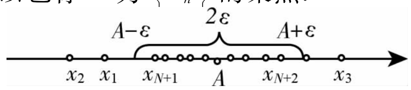

图1－1

例 1.1.1　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=2$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要使

$$|x_n-2|=\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要取 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 就可以了. 因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取正整数 $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，$|x_n-2|<\varepsilon$ 恒成立，所以 $x_n=\dfrac{2n+1}{n}$ 以 2 为极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=2$.

例 1.1.2　利用极限的几何意义，说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 不存在.

解 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，即 $0,1,0,1,\cdots$. 则数列 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 不能以 0 和 1 为极限，因为做邻域 $U\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，由于数列 $\{x_n\}$ 的偶数项 $x_{2n}=1$，从几何上看，这些项都在 $U\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的外面，因此找不到 N，使得从第 $N+1$ 项开始，以后的所有项都落在 $U\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内，而在 $U\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 外只有有限个项 x_n. 因此，$x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 不能以 0 为极限.

同理，$x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 也不能以 1 或其他数为极限，因此数列 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 不存在极限.

1.1.3　数列极限的性质

定理 1.1　(唯一性)若数列 $\{x_n\}$ 极限存在，则其必唯一.

说明　设极限不唯一，令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，而 $a\neq b$，不妨设 $a<b$. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，由数列收敛的定义，知存在 N_1，从第 N_1+1 项开始，以后的各项均要落在 $U\left(a,\dfrac{b-a}{2}\right)$ 内，即 $x_n<a+\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{a+b}{2}(n>N_1)$. 同理，当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$ 时，存在 N_2，从第 N_2+1 项开始，以后的各项均要落在 $U\left(b,\dfrac{b-a}{2}\right)$ 内，即 $x_n>b-\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{a+b}{2}(n>N_2)$，从而当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，有 $\dfrac{a+b}{2}<x_n<\dfrac{a+b}{2}$，矛盾，故唯一性定理成立.

如数列 $\{(-1)^n\}$ 极限不存在.

定理 1.2(有界性)　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则必定是有界数列.

说明　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由极限定义，取 $\varepsilon=1$，则一定存在 N，从第 $N+1$ 项开始，以后的各项均要落在 $U(a,1)$ 内，而在 $U(a,1)$ 外仅有有限多个 x_n［即 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 可能在 $U(a,1)$ 外］，取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则必有 $x_n\in[-M,M]$，$n=1,2,\cdots$，即数列 $\{x_n\}$ 是有界数列.

与定理 2 等价的结论是：若数列 $\{x_n\}$ 是无界数列，则 $\{x_n\}$ 发散，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

如，数列 $x_n = n^2$ 是无界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 不存在.

定理 1.3(保序性)　设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n > \lim\limits_{n\to\infty}y_n$，则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $x_n > y_n$.

说明　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = b$，且 $a > b$. 取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$，作邻域 $U\left(a,\dfrac{b-a}{2}\right)$，$U\left(b,\dfrac{b-a}{2}\right)$，则必存在 N，当 $n > N$ 时，$x_n \in U\left(a,\dfrac{a-b}{2}\right)$，即 $x_n > a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$；且 $y_n \in U\left(b,\dfrac{a-b}{2}\right)$，即 $y_n < b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$. 故当 $n > N$ 时，有 $y_n < \dfrac{a+b}{2} < x_n$ 或 $y_n < x_n$，即结论成立.

推论 1(保号性)　设 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n > 0$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n < 0$），则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $x_n > 0$ 或 $x_n < 0$.

推论 2　设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的极限存在，若 $x_n \leqslant y_n$（当 $n > N$ 时），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

特别地，若 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n \geqslant 0$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n \leqslant 0$）.

说明　在推论 2 中，若 $x_n < y_n$，也只能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}y_n$. 如：$x_n = \dfrac{1}{n} > 0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

习题 1.1

1. 观察下列数列的变化趋势，判别哪些数列有极限. 如有极限，写出它们的极限：

(1) $x_n = \dfrac{1}{a^n}(a > 1)$；　　(2) $x_n = (-1)^n\dfrac{1}{n}$；

(3) $x_n = (-1)^n - \dfrac{1}{n}$；　　(4) $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$；

(5) $x_n = \dfrac{n+1}{n-1}$；　　(6) $x_n = 2^{(-1)^n}$.

2. 用数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+1} = 0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n+3} = \dfrac{3}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n} = 0$.

3. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$. 考察数列 $x_n = (-1)^n$，说明上述结论反之不成立.

4. 数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n = 0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n = 0$.

5. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1} \to A(k\to\infty)$，$x_{2k}\to A(k\to\infty)$，证明：$x_n \to A(n\to\infty)$.

1.2　函数的极限

数列是定义在正整数集合上的函数,它的极限只是一种特殊的函数的极限.现在我们讨论定义于实数集合上的一般函数 $y=f(x)$ 的极限.

1.2.1　$x\to\infty$ 时,函数的极限

例如,函数 $y=1+\frac{1}{x}(x\neq 0)$,当 $|x|$ 无限增大时,y 无限地接近于 1,和数列极限一样,这是指"当 $|x|$ 无限增大时,$|y-1|$ 可以任意地小"。即对于任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $|y-1|=\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$,只要取 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$ 就可以了。亦即当 x 进入区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}\right)\cup\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right)$ 时,$|y-1|<\varepsilon$ 恒成立.这时我们就称 x 趋于无穷大时,$y=1+\frac{1}{x}$ 以 1 为极限.一般地,我们假设函数 $f(x)$ 当 $|x|>X$(即 x 在 $(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 内,其中 $X>0$)时有定义,如果当自变量 x 的绝对值无限增大时(记作 $x\to\infty$),对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的常数 A,那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,简称为函数在无穷大处的极限.对此我们用精确的数学语言给出严格的定义.

定义 1.3　如果存在常数 A,使得对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),那么总存在正数 X,只要 x 满足 $|x|>X$,对应的函数值 $f(x)$ 就能满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限是 A,并记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

如果这样的常数不存在,则称当 $x\to\infty$ 时,$f(x)$ 的极限不存在.

注　(1) $x\to+\infty$ 时的极限

设函数 $f(x)$ 当自变量 $x\to+\infty$,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的常数 A,称 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限是 A,并记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;

(2) $x\to-\infty$ 时的极限

设函数 $f(x)$ 当自变量 $x\to-\infty$,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的常数 A,称 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限是 A,并记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$;

(3) 定理 1.4　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 1.2.1　证明:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

证明　这里 $|f(x)-A|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$,要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$,即 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$.

因而 $\forall\varepsilon>0$,取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$,则当 $|x|>X$ 时,就有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(4)几何意义(见图1—2)

对任意给定的正数ε,在直线$y=A$的上下方各作一直线$y=A+\varepsilon$与$y=A-\varepsilon$,则总有一个正数X,使得在区间$(-\infty,-X)$与$(X,+\infty)$内,函数$f(x)$的图像位于这两条直线之间.

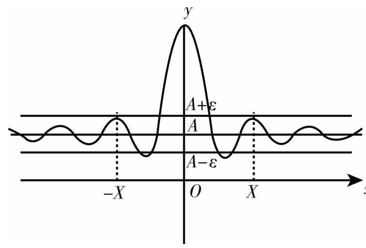

图1—2

1.2.2 $x\to x_0$ 时,函数的极限

设$y=f(x)$在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0)$有定义.如果当x无限接近于x_0时,对应的函数值$f(x)$无限接近于常数A,则称A是$f(x)$的当$x\to x_0$时的极限.例如,对函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,当$x\to1$时,$f(x)$无限接近于2.这就是说,当$x\to1$时,$f(x)$的极限是2,即$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

由上面的说明就可得出函数$f(x)$在有限点x_0处的极限的精确定义.

定义1.4 设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0)$有定义,存在常数A,如果对于任意给定的正数ε,总存在一个正数δ,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立,则称当$x\to x_0$时,函数$f(x)$以常数A为极限.记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0),$$

否则称当$x\to x_0$时,$f(x)$的极限不存在.

注 (1)函数在x_0处的左右极限

定义1.5 左极限 设函数$f(x)$在点x_0左邻域$(x_0-\delta,x_0)$有定义,当$x\to x_0$的过程中,函数值$f(x)$无限接近于确定的常数A,称$x\to x_0$时函数$f(x)$的左极限是A,并记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-);$$

定义1.6 右极限 设函数$f(x)$在点x_0右邻域$(x_0,x_0+\delta)$有定义,当$x\to x_0$的过程中,函数值$f(x)$无限接近于确定的常数A,称$x\to x_0$时函数$f(x)$的右极限是A,并记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+);$$

(2)定理1.5 函数$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且等于$A$的充分必要条件是$f(x)$在$x_0$处的左、右极限都存在且都等于$A$,即

$$f(x_0^+)=f(x_0^-)=A;$$

(3)几何意义(见图1—3)

对任意给定的正数ε,在直线$y=A$的上下方各作一直线$y=A+\varepsilon$与$y=A-\varepsilon$,则总有一个正数δ,使得在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内,函数$f(x)$的图像位于这两条直线之间.

例 1.2.2　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证明　因为有不等式 $|\sin x|\leqslant|x|$，$|\cos x|\leqslant 1$ 成立，所以有

$$|f(x)-A|=|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|<\varepsilon \text{ 成立.}$$

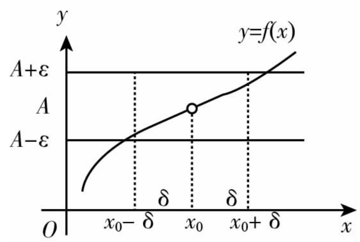

图 1—3

所以对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

例 1.2.3　设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin x=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=0,$$

由前面的定理 2，可知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

1.2.3　函数极限的性质

定理 1.6　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则其极限必唯一. 其中“ lim ”表示任一极限过程.

定理 1.7　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ [或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$]存在，则函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ [或 $(-\infty,-M)$ 和 $(M,+\infty)$]内均是有界的.

定理 1.8　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ [或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$]，且 $A>0$ [或 $A<0$]，则函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ [或 $(-\infty,-M)$ 和 $(M,+\infty)$]内 $f(x)>0$ [或 $f(x)<0$].

定理 1.9　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ [或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$]，且 $f(x)\geqslant 0$ [或 $f(x)\leqslant 0$]，则 $A\geqslant 0$ [或 $A\leqslant 0$].

注　定理 1.9 中即使 $f(x)>0$ [或 $f(x)<0$]，也得到 $A\geqslant 0$ [或 $A\leqslant 0$].

习题 1.2

1. 观察下列函数在自变量的给定变化趋势下是否有极限，如有极限，写出它们的极限：

(1) $x\sin\dfrac{1}{x}\,(x\to 0)$；　　(2) $\sin x+1\,(x\to+\infty)$；

(3) $\arctan x\,(x\to+\infty)$；　　(4) $\dfrac{x}{x-1}$.

2. 用函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x^2}{\sqrt{x}}=0$.

3. 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$. 并举例说明其逆命题不真.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ x^2+a, & x\geqslant 0\end{cases}$，问常数 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

5. 利用极限的几何意义说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

1.3　无穷小量与无穷大量

1.3.1　无穷小量

根据极限定义，容易看出下列两个极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 和 } \lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$$

是等价的，即可互相推出. 若令 $\alpha(x)=f(x)-A$，则对函数 $f(x)$ 的极限的讨论就可转化到以 0 为极限的函数 $\alpha(x)$ 上来，因此，以零为极限的函数在极限理论中扮演着十分重要的角色.

定义 1.7　若 $\lim\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$ 是该极限过程中的一个无穷小量. 其中省去 $x\to x_0, x\to\infty$ 等极限过程的符号，“ lim ”表示某一极限过程.

无穷小量在高等数学中占有非常重要的作用，许多变化状态较复杂的变量的研究常常可归结为相应的无穷小量的研究.

注　(1)以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 也称为 $n\to\infty$ 时的无穷小；

(2)任何非零常数都不能称为无穷小量，不要把无穷小量与非常小的数混淆；

(3)常数中只有 0 是任何极限过程中的无穷小量.

例如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小；$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2 为无穷小；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，所以当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{2^n}$ 为无穷小.

关于无穷小与函数极限的关系，我们有下面的定理：

定理 1.10　在自变量的同一变化过程中，$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中，α 为无穷小量.

证明　以 $x\to x_0$ 为例，其余情形类似.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，令 $\alpha=f(x)-A$，则 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x)=A+\alpha$.

反之，设 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，A 是常数且 $f(x)=A+\alpha$. 则由无穷小的定义，对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，使得 $|\alpha|<\varepsilon$，即 $|f(x)-A|<\varepsilon$，这说明当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定理 1.11　(1)有限个无穷小之和是无穷小；

(2)有界函数与无穷小之积是无穷小.

证明　(1)以两个无穷小在 $x \to x_0$ 时为例. 设 α, β 是 $x \to x_0$ 时的无穷小,即 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$,$\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$,故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在一个共有的 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$,$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$,从而 $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,即 $\alpha + \beta$ 是 $x \to x_0$ 的无穷小.

如,$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 0$,但是无限个无穷小之和不一定,如 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 1$.

(2)的证明留给读者自己.

推论 1　常数与无穷小之积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小之积是无穷小.

例 1.3.1　求(1) $\lim\limits_{x \to 0}(2\tan x + x^4)$;(2) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

解　(1)由于当 $x \to 0$ 时,$\tan x$ 和 x 均是无穷小,因此 $2\tan x$ 和 x^4 也都是无穷小,则可得

$$\lim_{x \to 0}(2\tan x + x^4) = 0.$$

(2)由于 $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 有界,而当 $x \to 0$ 时,x 是无穷小,则可得 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

1.3.2　无穷大量

如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,对应的函数的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,就说 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时是无穷大,其严格定义如下:

定义 1.8　如果对任意给定的正数 M(不论它有多么大),总存在正数 δ(或正数 X)使得当定义域中的 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$)时,对应的函数值 $f(x)$

满足不等式 $|f(x)| > M$,则称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大量,记作:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty(\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty).$$

注意　(1) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$ 只是借用极限符号来表述函数的这一变化趋势,尽管我们也说"函数的极限是无穷大",但并不意味着函数 $f(x)$ 存在极限.

(2)无穷大不是一个数,不可把它与很大的数混为一谈.

(3)无穷大与无界量不同,如数列 1,　0　2,　0,　…,　n,　0,… 是无界的,但不是 $n \to \infty$ 时的无穷大.

(4)若定义中 $|f(x)| > M$ 换成 $f(x) > M$ 或 $f(x) < -M$,则称 $f(x)$ 是正或负无穷大量,记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty$ 或 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty$.

例 1.3.2　判断下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$;　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} e^x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$.

解　(1)由函数 $y = \tan x$ 的图像(图 1—4)可得

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = +\infty, \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty, \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

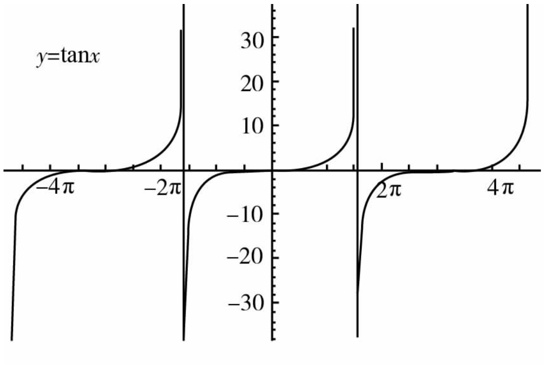

图 1—4 $y = \tan x$

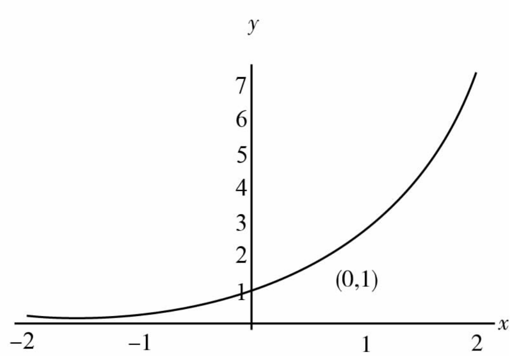

图 1—5 $y = e^x$

(2) 由函数 $y = e^x$ 的图像(图 1—5)可得

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ , } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ ,}$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在.

定理 1.12 在自变量的同一变化过程中,

(1)若 $f(x)$ 是无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小;

(2)若 $f(x)$ 是无穷小且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

例如,由于 $\lim\limits_{x\to0} x = 0$,但 $x \neq 0$,所以 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x} = \infty$;由于 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

习题 1.3

1.举例说明:在某极限过程中,两个无穷小量之商、两个无穷大量之商、无穷小量与无穷大量之积都不一定是无穷小量,也不一定是无穷大量.

2.判断下列命题是否正确:

(1)无穷小量与无穷小量的商一定是无穷小量;

(2) 有界函数与无穷小量之积为无穷小量;

(3)有界函数与无穷大量之积为无穷大量;

(4) 有限个无穷小量之和为无穷小量;

(5)有限个无穷大量之和为无穷大量;

(6) $y = x\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界,但 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x \neq \infty$;

(7) 无穷大量的倒数是无穷小量;

(8)无穷小量的倒数是无穷大量.

3.指出下列函数哪些是该极限过程中的无穷小量,哪些是该极限过程中的无穷大量.

(1) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}, x \to 2$;

(2) $f(x) = \ln x, x \to 1$;

(3) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x \to 0^+, x \to 0^-$;

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x, x \to \infty$.

1.4　极限的运算法则

1.4.1　极限的运算法则

定理 1.13　设 $\lim\limits_{x} f(x) = A, \lim\limits_{x} g(x) = B$，$\lim\limits_{x}$ 表示 x 的某个变化过程（$x \to x_0$ 或者 $x \to \infty$），那么

(1) $\lim\limits_{x}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x} f(x) \pm \lim\limits_{x} g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim\limits_{x}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x} f(x) \lim\limits_{x} g(x) = A \cdot B$；

(3) 若 $B \neq 0$，则有 $\lim\limits_{x} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim\limits_{x} f(x)}{\lim\limits_{x} g(x)}$.

证明　以(2)为例，其他情形类似.

因为 $\lim\limits_{x} f(x) = A, \lim\limits_{x} g(x) = B$，所以可得 $f(x) = A + \alpha, g(x) = B + \beta$，

其中 α, β 为同一变化过程中的无穷小，则

$$f(x)g(x) = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + (A\beta + B\alpha + \alpha\beta),$$

而由无穷小的性质知，$A\beta + B\alpha + \alpha\beta$ 是一个无穷小，所以 $\lim\limits_{x}[f(x)g(x)] = AB$.

例 1.4.1　求下列多项式的极限

$\lim\limits_{x \to x_0}(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n)$. 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常数.

解　$\lim\limits_{x \to x_0}(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$

$= a_0(\lim\limits_{x \to x_0} x)^n + a_1(\lim\limits_{x \to x_0} x)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\lim\limits_{x \to x_0} x)^1 + a_n$

$= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n$.

结论　多项式函数 $p(x)$ 当 $x \to x_0$ 极限为 $p(x_0)$.

例 1.4.2　求 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$.

解　$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} = \dfrac{(-1)^2 + 2(-1) + 2}{(-1)^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$.

例 1.4.3　求 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x - a)^2}{x^2 - a^2} (a \neq 0)$.

解　$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x - a)^2}{x^2 - a^2} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x - a)^2}{(x - a)(x + a)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x - a}{x + a} = \dfrac{0}{2a} = 0$.

例 1.4.4　求 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}}$.

解　$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x - a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{\sqrt{x - a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \dfrac{0}{2\sqrt{a}} = 0$.

结论　$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} (Q(x_0) \neq 0$，其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式函数)；若 $Q(x_0) = 0$，则想办法把分母的零因子消去，然后再求极限.

例 1.4.5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2+2}{7x^3+5x^2+2x+1}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2+2}{7x^3+5x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{4}{7}$.

结论　当 $a_0,b_0\neq 0$ 时

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & 当\ m=n\\ 0 & 当\ m<n\\ \infty & 当\ m>n\end{cases}.$$

例 1.4.6　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n-1}$.

解　因为当 $|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}|a|^n=0$，所以本题分子分母同时除以 3^n，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=0.$$

1.4.2　复合函数的极限运算法则

定理 1.14　设 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$，且在 x_0 的某去心邻域内 $u(x)\neq u_0$，则复合函数 $f[u(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[u(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

注：该法则对 $x\to\infty$ 仍然适用.

例 1.4.7　求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x-a}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\cos(\ln x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}$.

解　(1) $\sqrt{x-a}$ 可以看作 $f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=x-a$ 复合而成. 当 $x\to a$ 时，有 $u\to 0$，并且 $\lim\limits_{u\to 0}\sqrt{u}=0$，因而 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x-a}=\lim\limits_{u\to 0}\sqrt{u}=0$.

(2) $\cos(\ln x)$ 可看作 $f(u)=\cos u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成. 当 $x\to 1$ 时，$u\to 0$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\cos(\ln x)=\lim\limits_{u\to 0}\cos u=1$.

(3) $\arctan\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}$ 可看作 $f(u)=\arctan u$ 与 $u=\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}$ 复合而成. 当 $x\to 1^+$ 时，$u\to+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{u\to+\infty}\arctan u=\dfrac{\pi}{2}$.

习题 1.4

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+4}{5n^3+n^2-n+1}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n\right]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n})$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$；

(7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+4}{2x^4+3x^2}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$；　　(10) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$；

(11) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$；

(13) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$；　　(14) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

2. 已知数列 $x_n=(1+a)^n+(1-a)^n$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}1+|a|, & a\neq0\\ 1, & a=0\end{cases}.$$

1.5　极限存在准则与两个重要极限

本节介绍极限存在的两个准则及由这些准则推得的两个重要极限，它们在求极限的时候占有非常重要的作用.

1.5.1　夹逼准则

定理 1.15　设在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,r)$ 中，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证明　按定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，故存在 $\delta_1>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时，有 $|g(x)-A|<\varepsilon$，就有

$$-\varepsilon<g(x)-A.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，故 $\delta_2>0$ 存在，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时，有 $|h(x)-A|<\varepsilon$，就有

$$h(x)-A<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,r\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，不等式 $-\varepsilon<g(x)-A$，$h(x)-A<\varepsilon$ 同时成立，并注意到条件

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

就得

$$-\varepsilon<g(x)-A\leqslant f(x)-A\leqslant h(x)-A<\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

从而证明了

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

注　该准则对于 $x \to \infty$ 或者数列仍然成立.

1.5.2　单调有界收敛准则

定理 1.16　若数列 $\{x_n\}$ 单调增加,即 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$,且其有上界;或者 $\{x_n\}$ 单调减小,即 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$,且其有下界,则极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在.

例 1.5.1　求 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　因为 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$, $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$,

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

例 1.5.2　设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$, $(n=1,2,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在并求之.

解　显然 $x_n>0$,且 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \dfrac{1}{x_n}}=1$. 从而

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n}-x_n\right)=\frac{1-x_n^2}{2x_n} \leqslant 0$$

即 x_{n+1} 单调递减有下界,故 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n=A$,由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$,令 $n \to \infty$,得

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{1}{A}\right),$$

解得, $A^2=1$,即 $A=\pm 1$,因 $x_{n+1} \geqslant 1$,由保号性定理知 $A=\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} \geqslant 1$,故

$$A=\lim_{n \to \infty} x_n=1.$$

1.5.3　第一个重要极限 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

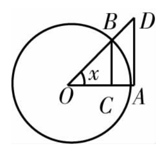

图 1－6

作一单位圆,在第一象限中取此单位圆周上的两点 A,B (如图 1－6),设 $\angle AOB=x, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$,从而

ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<\Delta DOA$ 面积 ,

即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x\ ,$$

故当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$，由 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的奇偶性可知，$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时，该不等式仍成立，即当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. 于是由夹逼定理得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\ .$$

例 1.5.3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$ ($a \neq 0$).

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{ax} = a\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = a\ .$

例 1.5.4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1\ .$

例 1.5.5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$

解　令 $u = \arcsin x$，当 $x \to 0$ 时，$u \to 0$，于是

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} = 1\ .$

1.5.4　第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，由二项式定理将 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 展开可知 $x_n < x_{n+1}$，$n = 1,2,\cdots$，又可得到 $x_n < 3$，则由单调有界收敛准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，且我们可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$，其中 $e = 2.718281828459\cdots$ 是一个常数. 还可证明对于实数 x，也有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

例 1.5.6　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}} = \frac{1}{e}$.

例 1.5.7　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解　令 $\frac{1}{x} = t$，则当 $x \to 0$ 时，$t \to \infty$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\ .$

例 1.5.8　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

例 1.5.9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\frac{x}{x+2}}=e^{-1}$.

习题 1.5

1.计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}(\beta\neq 0)$； (4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\sqrt{x}\cot\sqrt{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$； (6) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\dfrac{x}{n}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin x}$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

2.计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x+1}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^{2}x)^{\cot^{2}x}$.

3.利用夹逼准则证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^{2}+a}+\dfrac{1}{n^{2}+2a}+\cdots+\dfrac{1}{n^{2}+na}\right)=1(a\geqslant 0)$.

4.利用单调有界收敛准则证明下列数列存在极限，并求出极限值：

$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots\ldots$.

1.6 无穷小量的比较

我们知道，有限多个无穷小的代数和与积仍然是无穷小，而两个无穷小的商则会出现各种不同的情况，例如

考虑当 $x\to 0$ 时的无穷小量 $x,x^{2},\sin x$，可得以下结果：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{x}=0$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^{2}}=\infty$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

由于两个无穷小量的商并不遵循极限的除法法则并且一般不能立刻判断极限是否存在，所以人们通常称这种极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限，结果不同反映了作为分子和分母的两个无穷小趋于零的“快慢”程度不同，比如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{x}=0$，说明分子 $x^{2}\to 0$ 比分母 $x\to 0$ 要“快”；而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^{2}}=\infty$，说明分子 $x\to 0$ 比分母 $x^{2}\to 0$ 要“慢”；而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，说明分子 $\sin x\to 0$ 与分母 $x\to 0$“速

度相仿”.

在自变量同一变化过程中，比较两个无穷小量趋于零的“速度”是很有意义的. 特别在处理未定式极限问题时，利用无穷小的比较常会带来很多方便.

针对上述几种情形，分别对应无穷小量比较的概念.

1.6.1　无穷小量比较的概念

定义 1.9　设 α,β 是在同一变化过程中的两个无穷小，

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$，或者称 β 是比 α 低阶的无穷小；

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c(c\neq 0)$，称 α 是与 β 同阶的无穷小；

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，称 α 是与 β 等价的无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$.

如上面的例子，当 $x\to 0$ 时，$x^2=o(x)$，而 $\sin x\sim x$.

1.6.2　等价无穷小的性质

定理 1.17　设在某极限过程中，$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$. 若 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证明　$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)$$
$$=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}$$
$$=1\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot 1$$
$$=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

应用等价无穷小的代换可使未定式的形式变得简洁而易解，从而简化运算. 我们应该掌握一些特殊的等价无穷小以利于计算.

例 1.6.1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

即，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$.

例 1.6.2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $e^x-1=u$，则 $x=\ln(1+u)$，当 $x\to 0$ 时，有 $u\to 0$，则利用上例的结果可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

即，当 $x \to 0$ 时，$e^x - 1 \sim x$.

下面将常见的等价无穷小作一归纳

当 $x \to 0$ 时，

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$；

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$；$(1+x)^a - 1 \sim ax\ (a \neq 0)$；$a^x - 1 \sim x\ln a\ (a > 0, a \neq 1.)$

例 1.6.3　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\tan 2x}$.

解　当 $x \to 0$ 时 $\sin 5x \sim 5x, \tan 2x \sim 2x$

故
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

结论　若未定式的分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小的代换，而不会改变原式的极限.

例 1.6.4　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)x}{x} = 1$.

例 1.6.5　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$.

错解　当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x, \sin x \sim x$，

原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x}{(2x)^3} = 0$.

解　当 $x \to 0$ 时，$\sin 2x \sim 2x, \tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim \dfrac{1}{2}x^3$，

原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3} = \dfrac{1}{16}$.

例 1.6.6　求 $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 \ln\left(1 + \dfrac{4}{x^3}\right)$.

解　$\lim\limits_{x \to \infty} x^3 \ln\left(1 + \dfrac{4}{x^3}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} x^3 \cdot \dfrac{4}{x^3} = 4$.

习题 1.6

1. 若 $\beta(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 存在，证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

2. 利用等价无穷小量求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\tan bx}\ (b \neq 0)$ ；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos kx}{x^2}$ ；

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x} - 1}$ ；　　(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1+x^2} - 1}$ ；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(1-x)}{\ln x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2}$.

3. 设 $m,n\in\mathbf{N}^+$，证明：当 $x\to 0$ 时，

(1) $o(x^m)+o(x^n)=o(x^l),l=\min\{m,n\}$；

(2) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$；

(3)若 α 是 $x\to 0$ 时的无穷小，则 $\alpha x^m=o(x^m)$；

(4) $o(kx^n)=o(x^n),(k\neq 0)$.

4. 证明等价无穷小具有以下性质：

(1) $\alpha\sim\alpha$（自反性）；

(2)若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$（对称性）；

(3)若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$（传递性）.

1.7　函数的连续性

现实生活中很多变量是连续不断的. 如气温、物体运动的路程、金属丝加热时长度的变化等等，都是连续变化的。这种现象反映在数学上就是函数的连续性，它是微积分的又一个重要概念.

但也有一些与之相反的现象，如发射三级火箭，在它升空的过程中，随着火箭燃料的消耗，火箭质量逐渐变小，当每一级火箭的燃料耗尽时，该级火箭自行脱落，于是飞行质量突然从一个值跳过所有中间值减少为另一个值，即在此时发生了间断.

1.7.1　函数的连续性

定义 1.10　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时，对应的函数的增量 Δy 也趋向于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \text{ 或 } \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

定义 1.11　设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 1.12　单侧连续

(1)设函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta]$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续；

(2)设函数 $f(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0]$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续；

定理 1.18 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 既是左连续又是右连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

例 1.7.1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 0\\ -x+1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$，$f(0)=-1$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是不连续的，但函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 是右连续的，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=-1$.

定义 1.13 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上每一点都连续，则称 $f(x)$ 是该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续. 如果 $f(x)$ 同时在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，记作 $f(x)\in C([a,b])$.

从几何直观上看，在一个区间上连续的函数的图形是一条不间断的曲线.

1.7.2 函数的间断点

定义 1.14 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 间断，x_0 称为间断点.

显然，若 $f(x)$ 在 x_0 间断必为以下三种情形之一：

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义；

(2) $f(x)$ 在 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3)虽然 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

例 1.7.2 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是间断的.

但是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以若补充定义 $f(0)=1$，则得到函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases},$$

该函数在点 $x=0$ 处连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 存在，但 $f(x)$ 在 x_0 无定义，或者虽有定义，但 $f(x_0)\neq a$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点. 此外，若补充定义或改变 $f(x)$ 在 x_0 处的值为 $f(x_0)=a$，就使得 $f(x)$ 在 x_0 处变成连续了.

例 1.7.3 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$，考察函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义，且 $f(0)=0$. 但是

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处间断.

如果 x_0 是函数的间断点，而函数在 x_0 处的左右极限都存在但不相等，则把 x_0 称作是函数的跳跃间断点.

可去和跳跃间断点统称为第一类间断点；除此之外的任何间断点都称为第二类间断点.

如 $x=0$ 是函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点，此处又称为振荡间断点；而 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以此处又称为无穷间断点.

1.7.3　连续函数的运算

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处连续，那么它们的和 $f+g$，差 $f-g$，积 $f\cdot g$ 与商 $\dfrac{f}{g}(g(x_0)\neq 0)$ 都在 x_0 连续；且若满足复合的条件，它们的复合函数仍然连续；若反函数存在，则反函数也相应连续.

定理 1.19　初等函数在定义区间内是连续的.

例 1.7.4　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{x\sin 2x}+e^{\tan x}+\ln^2 x\right)$.

解　因为 $\sqrt{x\sin 2x}+e^{\tan x}+\ln^2 x$ 是初等函数，且 $\dfrac{\pi}{4}$ 是其定义区间中的一点，故

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{x\sin 2x}+e^{\tan x}+\ln^2 x\right)=\sqrt{\frac{\pi}{4}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}+e^{\tan\frac{\pi}{4}}+\ln^2\frac{\pi}{4}$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{4}}+e+\ln^2\frac{\pi}{4}.$$

例 1.7.5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\,\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}=2^1=2$.

习题 1.7

1. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & 0\leqslant x<1\\ 3-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$；　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<1\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x\geqslant 1\end{cases}$.

2. 求下列函数的间断点，并说明间断点的类型：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$；　(2) $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\sin x}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$；　(4) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$.

3. 适当选择 a 值，使函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$，讨论 $f(x)$ 的连续性.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{x^2+x-2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3+2x-x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-1)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^x$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1+x}{x^2}}$.

1.8 闭区间上的连续函数

下面介绍定义在闭区间上的连续函数的三个基本性质. 由于证明要用到实数理论，超过本书要求，故我们只从直观上加以说明，将严格的证明略去.

1.8.1 最值定理

定义 1.15 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，且 $x_0\in I$. 若对 $\forall x\in I$，都有 $f(x)\leqslant(\geqslant)f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的最大(小)值，最大值和最小值统称为最值，x_0 称为最值点.

定理 1.20 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数，则 $f(x)$ 一定能在该区间上取到最值.

这是说，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么至少有一点 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=M$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值；又至少有一点 $\eta\in[a,b]$，使 $f(\eta)=m$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，这也表明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的.

即
$$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow\exists\,\xi,\eta\in[a,b],s.t.\ f(\xi)=M,f(\eta)=m,.$$
$$M=\max_{x\in[a,b]}f(x),m=\min_{x\in[a,b]}f(x)$$

推论 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数，则 $f(x)$ 一定能在该区间上有界.

定理 1 的证明从略，但是我们要指出：定理中“闭区间 $[a,b]$”这一条件是重要的，若这个条件不满足，定理的结论就不成立了. 例如，区间 $(0,1]$ 上的连续函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上是无界的，也没有最大值；再如区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的连续函数 $f(x)=\tan x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上也是无界和没有最大值的.

1.8.2 零点定理与介值定理

定理 1.21(零点定理) $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 的连续函数，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$.

注 若存在 x_0，使得 $f(x_0)=0$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的零点或方程 $f(x)=0$ 的根，故零点定理又称根的存在定理.