目 录

第一章　函　数

函数是微积分的重要基本概念之一，是微积分的研究对象. 本章将在概括总结函数有关概念的基础上，着重介绍函数的复合运算、初等函数等概念，以及实际应用中函数的建立方法.

1.1　集合

一、集合

1. 集合的概念

(1) 定义 具有某种特定性质的事物的总体称为集合. 组成集合的每一个对象称为集合的元素.

(2) 表示 集合通常用大写字母 A、B、C⋯ 表示，用小写字母 a、b、c、⋯ 表示集合的元素.

集合的几个例子：

例 1　2012 年 1 月 1 日在中国出生的人.

例 2　全体偶数构成一个集合.

例 3　方程 $x^2-x-2=0$ 的根构成一个集合.

例 4　抛物线 $y=x^2$ 上的所有点.

如果 x 是集合 A 的元素，则 x 属于 A，记作 $x\in A$；若 x 不是集合 A 的元素，则 x 不属于 A，记作 $x\notin A$.

含有有限个元素的集合称为有限集；含有无限个元素的集合称为无限集；不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ.

2. 集合的表示方法：

(1) 列举法在{} 中按任意顺序、不遗漏、不重复地列出集合的所有元素. 例如，集合 A 由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成，可表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 这种表示法一般适用于有限集和可数无限集.

(2) 描述法 若 A 是具有某种特征 P 的元素 x 全体所构成的集合，该集合记为

$A=\{x\mid x$ 具有特征 $P\}$.

例如，一元二次方程 $x^2-x-2=0$ 的解集，记为

$A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$

又如，全体偶数构成一个集合，记为

$A = \{x \mid x = 2n, n\text{ 为正整数}\}$

3. 集合与集合间的关系

(1) 子集 设 A, B 是两个集合，若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，简称为子集，记作 $A \subset B$ 或者 $B \supset A$. 我们规定，空集 ϕ 是任何集合 A 的子集，即 $\phi \subset A$.

(2) 相等 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

如果集合的元素都是数，则称之为数集. 常见数集：

N—— 自然数集；Z—— 整数集；Q—— 有理数集；$\mathbf{R}$—— 实数集；C—— 复数集.

把非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为 Z^+，Q^+ 和 $\mathbf{R}^+$，

显然有 $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

4. 集合的运算

(1) 定义 集合的基本运算有三种：交、并、差.

设 A, B 是两个集合，则集合

$A \cup B = \{x \mid x \in A\text{ 或 }x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A\text{ 且 }x \in B\}$

$A \backslash B = \{x \mid x \in A\text{ 但 }x \notin B\}$

分别称为 A 与 B 的并集、交集、差集.

研究某一问题时所考虑的对象的全体称为全集，并用 Ω 表示，把差集 $\Omega \backslash A$ 称为 A 的余集或补集，记作 A^c.

(2) 集合的并、交、余运算满足下列法则：

交换律 $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

二、区间和邻域

1. 区间

区间是常用的一类数集，大体可以分为有限区间和无限区间.

符　号	名　称		定　义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x \mid a < x < b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$

符 号	名 称		定 义
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid x>a\}$
$[a,+\infty)$		半开区间	$\{x\mid x\geqslant a\}$
$(-\infty,b)$		开区间	$\{x\mid x<b\}$
$(-\infty,b]$		半开区间	$\{x\mid x\leqslant b\}$
$(-\infty,+\infty)$		开区间	$\{x\mid \lvert x\rvert<+\infty\}$

2.邻域

数集 $\{x\mid \lvert x-a\rvert<\delta\}$称为$a$ 的δ 邻域,记为

$$U(a,\delta)=\{x\mid \lvert x-a\rvert<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

a 称为邻域的中心;δ 称为邻域的半径.

数集表示在 a 的δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a 的集合,称为 a 的去心δ 邻域,记作

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$$

如果无需指明邻域的半径δ时,常把 a 的某邻域(或去心邻域) 表示为$\mathring{U}(a)$(或$\mathring{U}(a)$).

习题 1.1

1.如果 $A=\{x\mid 1<x<3\}$,$B=\{x\mid x>2)\}$.求:

(1)$A\cup B$; (2)$A\cap B$; (3)$A\backslash B$.

2.已知集合 $A=\{a,2,4,6\}$,$B=\{1,3,4,b\}$.若 $A\cap B=\{1,4,6\}$,求 a,b.

3.解下列不等式:

(1)$x^2\leqslant 16$; (2)$0<\lvert x-2\rvert\leqslant 2$;

(3)$\lvert x-1\rvert\geqslant 1$; (4)$\lvert x+1\rvert\leqslant\lvert x\rvert$.

4.用区间表示下列不等式的解

(1)$\lvert x-a\rvert<\varepsilon$($a$ 为常数,$\varepsilon>0$); (2)$0<\lvert x-a\rvert<\varepsilon$.

1.2 函 数

一、函数的概念

引例:

例 1 自由落体,物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着 $s=\frac{1}{2}gt^2$其中 g 是重力加速度,是常数.如果物体距地面的高度为 h,$\forall\ t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$,都对应一个距离 s.

例 2 球的半径 r 与该球的体积 V:$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 其中 π 是圆周率,是常数. $\forall\ r\in[0,\infty)$ 都对应一个球的体积 V.

上面两例来自于不同的问题,但是他们确有共同之处,我们将其抽象出来,便是函数的概念.

定义1 设 A 是非空数集.若存在对应关系 f,对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y\in R$,则称 f 是定义在 A 上的**函数**,记为

$$f:A\to R,$$

(1) 数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**,记为 $y=f(x)$;

(2) x 称为**自变量**,y 称为**因变量**;

(3) 数集 A 称为函数 f 的**定义域**,函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.

关于函数概念的几点说明:

(1) 函数的符号可简化:为方便起见,我们约定,将"f 是定义在数集 A 上的函数",用符号"$y=f(x),x\in A$"表示.当不需要指明函数 f 的定义域时,又可简写为"$y=f(x)$",有时甚至笼统地说"$f(x)$ 是 x 的函数(值)".

(2) 求函数的定义域:

当函数无实际意义时定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A=\{x\,|\,f(x)\in R\}$.例,函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合,即闭区间 $[-1,1]$.

当函数有实际意义,它的定义域要受实际意义的约束.例如,上述例2,半径为 r 的球的体积 $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数,从抽象的函数来说,r 可取任意实数;从它的实际意义来说,半径 r 不能取负数,因此它的定义域是区间 $[0,\infty)$.

(3) 在函数 $y=f(x)$ 的定义中,要求对应于 x 值的 y 值是唯一确定的,这种函数也称为单值函数.如果取消唯一这个要求,即对应于 x 值,可以有两个或两个以上确定的 y 值与之对应,那么函数 $y=f(x)$ 称为多值函数.例如函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是多(双)值函数.

(4) 函数的两要素为:定义域和对应法则,与变量用何符号表示没有关系.

例 3 求函数 $y=\sqrt{x+2}+\frac{1}{1-x^2}$ 的定义域.

解:函数的定义域是使函数有意义的自变量 x 的全体.即

$$\begin{cases}x+2\geqslant 0\\1-x^2\neq 0\end{cases}$$

得到函数的定义域 $D_f=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

例 4 绝对值函数 $y=|x|$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,(如图 1.2－1).

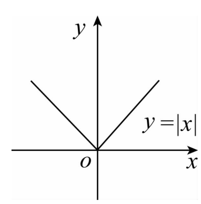

图 1.2－1

例 5 取整函数

设任意实数 x,记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,称 $f(x)=[x]$ 为取整函数,它的定义域是 R,值域是整数集,如 $[3.2]=3$,$[-2.3]=-3$,$[2]=2$,

(如图 1.2－2).

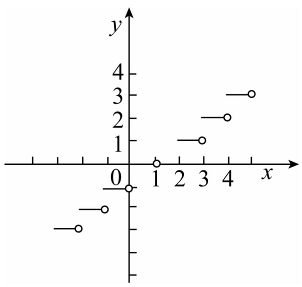

图 1.2－2

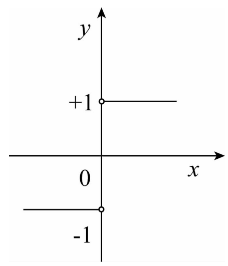

图 1.2－3

例 6　符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0.\end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,(如图 1.2－3).

不难看出,例 4 、例 6 具有这样特征,对于自变量的不同取值,函数不能用一个式子表示,而需要用两个或两个以上的式子表示,通常称之为分段函数.分段函数是用几个式子合起来表示的是一个函数.在自然科学、工程技术和经济管理领域涉及的许多函数多属于分段函数的形式.

二、函数的四个性质

1. 函数的有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,若存在正数 M,使得对于 $\forall x\in I$,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界,或称 $f(x)$ 为区间 I 上的有界函数;否则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界,或称 $f(x)$ 为区间 I 上的无界函数.

可以证明,函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是存在数 m,M 且 $M>m$,使得对于 $\forall x\in I$,都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

其中 m 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界,M 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的,因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$.而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的,在 $[1,+\infty)$ 上是有界的.

2. 函数的单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义,若对 $\forall x_1,x_2\in A$ 且 $x_1<x_2(x_1>x_2)$,

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上**单调增加**(单调减少).

从几何直观上看,递增是指随着自变量 x 的增加,函数的图像逐渐上升;递减是指随着自变量 x 的增加,函数的图像逐渐下降.

关于函数单调性的讨论，将在后续导数的几何应用中研究.

3. 函数的奇偶性

定义 4　设函数 $f(x)$ 定义在数集 A，若 $\forall x \in A$，有 $-x \in A$，且

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 是**奇函数(偶函数)**.

例如，函数 $y = x^4 - 2$，$y = \sqrt{1-x^4}$，$y = \dfrac{\sin x}{x}$ 都是偶函数；函数 $y = \dfrac{1}{x^3}$，$y = x$，$y = x^2\sin x^3$ 都为奇函数；函数 $y = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数，称为非奇非偶函数. 显然，奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

例 7　判断函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解：函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，且

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -f(x)$$

所以函数 $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

4. 函数的周期性

定义 5　设函数 $f(x)$ 定义在数集 A，若 $\exists T > 0$，$\forall x \in A$，有 $x \pm T \in A$，且

$$f(x \pm T) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的一个**周期**. 称满足上式的最小的正数 T，为 $f(x)$ 的最小正周期.

周期函数的图形特点是，如果把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离，则它将与周期函数的其他部分图形重合.

例如，$y = \sin 3x$ 是周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的周期函数. 再如，$y = |\cos x|$ 是周期为 π 的周期函数.

三、反函数

定义 6　设函数 $y = f(x)$，$x \in X$. 若对任意 $y \in f(X)$，有唯一一个 $x \in X$ 与之对应，使 $f(x) = y$，则在 $f(X)$ 上定义了一个函数，记为

$$x = f^{-1}(y), y \in f(X)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**.

习惯上，常以 x 为自变量，y 表示函数，于是反函数又记为 $y = f^{-1}(x)$.

注意，①$y = f(x)$ 的定义域为 $y = f^{-1}(x)$ 的值域，$y = f(x)$ 的值域为 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域；②$y = f^{-1}(x)$ 的图形与 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称，(如图 1.2－4)；③ 单调函数的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 具有相同的单调性.

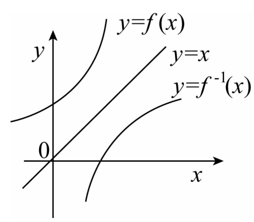

图 1.2－4

例 8　求 $y = x^3$，$x \in \mathbf{R}$ 的反函数.

解：由 $y = x^3$，得 $x = \sqrt[3]{y}$，$y \in \mathbf{R}$，故所求反函数为 $y = \sqrt[3]{x}$，$x \in \mathbf{R}$.

四、复合函数

按照通常函数的记号，复合函数的概念表述如下：

定义 7 设有函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，若 $R_g\cap D_f\neq\phi$，则称定义在

$$\{x\mid x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

上的函数 $(fog)(x)=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，其中 u 为中间变量.

若 $R_g\cap D_f=\phi$，则 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 两者不能进行复合运算. 例如，$f(u)=\arccos u$，$u=g(x)=2+x^2$，由于 $R_g\cap D_f=[2,+\infty)\cap[-1,1]=\phi$，

所以这两个函数不能进行复合运算.

利用复合函数的概念，可以把一个复杂函数分解成若干个简单的函数，也可以利用几个简单函数复合成一个较复杂的函数. 例如，$y=\sin\ln x$ 可以看作是由 $y=\sin u$，$u=\ln x$ 复合而成的；$y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{1-x^2}$.

另外，还可以将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=2x+3$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{\ln(2x+3)}$，$x\in[-1,+\infty)$.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}$； (2) $y=\ln(x+1)$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$； (4) $y=\arcsin(x-1)$；

(5) $y=\sqrt{\lg x^2}$； (6) $y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & |x|<2\\ x^2-2 & 2<|x|<4.\end{cases}$.

2. 下列两个函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$； (2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ 与 $g(x)=x^2-1$； (4) $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$；

(5) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$； (6) $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x-1, & x<1\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$，求 $f(x)+g(x)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，试求 $f(\dfrac{\pi}{6})$，$f(\dfrac{\pi}{4})$，$f(-\dfrac{\pi}{4})$，$f(-2)$ 并作出函数 $y=f(x)$ 图像.

5. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $y=x-x^3$； (2) $y=2+\cos x$；

(3) $y=xe^{x^2}$； (4) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(5) $f(x)=\cos x+\sin x+1$；　　(6) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

6. 求函数 $y=\dfrac{3^x}{3^x+1}$ 的反函数.

7. 下列函数哪些是周期函数?如果是,请指出其周期：

(1) $y=\sin 3x$；　　(2) $y=\sin x+\cos x$.

8. 求由所给函数复合而成的复合函数：

(1) $y=\sqrt{u},u=\lg x$；　　(2) $y=u^2,u=\arcsin v,v=\sqrt{x}$.

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x},\varphi(x)=\sin x$,求 $f(f(x)),f(\varphi(x)),\varphi(f(x)),\varphi(\varphi(x))$.

10. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\arcsin\sqrt{\cos x}$；　　(2) $y=\sqrt{\lg\sin^3 x}$；

(3) $y=\arctan e^x$；　　(4) $y=\sin^2\sqrt{1-x-x^2}$.

1.3 初等函数

一、基本初等函数

函数是微积分的研究对象,常用的函数有常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,我们将这六类函数称之为基本初等函数.由于有些函数,中学已详细介绍,这里只作简要复习.

1. 常函数

$$y=C(C\text{ 是常数}),$$

它的定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$\{C\}$,(如图 1.3－1).

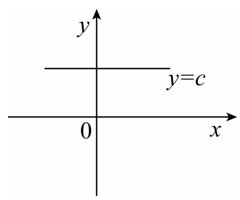

图 1.3－1

2. 幂函数

$$y=x^\mu(\mu\text{ 是常数}),$$

$y=x^\mu$ 的定义域取决于μ.无论μ取何值,$y=x^\mu$ 在$(0,+\infty)$上有定义,图形都过$(1,1)$点.常用的幂函数有 $y=x,y=x^2,y=\sqrt{x}$,(如图 1.3－2).

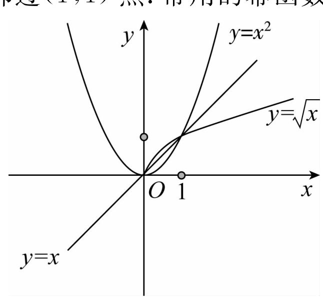

图 1.3－2

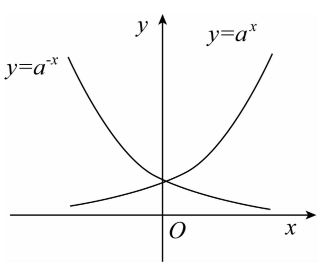

图 1.3－3

3. 指数函数

$$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$$

$y = a^x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时，$y = a^x$ 单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，$y = a^x$ 单调减少，(如图 1.3－3).

4. 对数函数

$$y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$$

$y = \log_a x$ 的定义域为$(0, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时，$y = a^x$ 单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，$y = a^x$ 单调减少，(如图 1.3－4). 易知，函数 $y = a^x$ 与函数 $y = \log_a x$ 互为反函数，其图形关于 $y = x$ 对称.

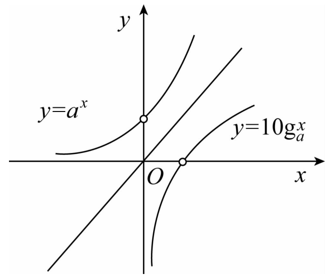

图 1.3－4

5. 三角函数

常用的三角函数有：

正弦函数 $y = \sin x$，(如图 1.3－5)，其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1, 1]$，是奇函数且有界，是以 2π 为周期的周期函数.

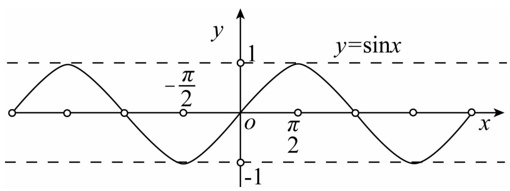

图 1.3－5

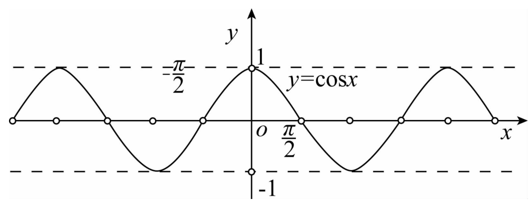

图 1.3－6

余弦函数 $y = \cos x$，(如图 1.3－6)，其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1, 1]$，是偶函数且有界，是以 2π 为周期的周期函数.

正切函数 $y = \tan x$，(如图 1.3－7)，其定义域为 $D = \{x \mid x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$ 值域为$(-\infty, +\infty)$，是奇函数，是以 π 为周期的周期函数.

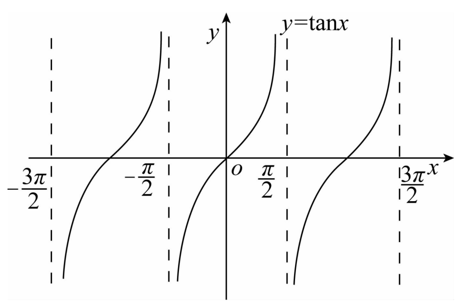

图 1.3－7

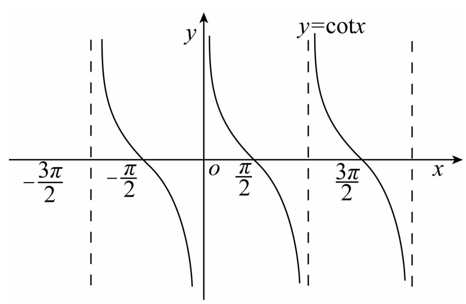

图 1.3－8

余切函数 $y = \cot x$，(如图 1.3－8)，其定义域为 $D = \{x \mid x \in R, x \neq k\pi, k \in Z\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，是奇函数，是以 π 为周期的周期函数.

此外,还常用到两个三角函数:正割函数 $y=\sec x$(其中 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$)和余割函数 $y=\csc x$(其中 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$),二者都是以 2π 为周期的周期函数.

为方便大家学习,下面给出一些微积分中常用到的三角公式.

分式公式

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x},\sec x=\dfrac{1}{\cos x},\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$;

平方和公式

$\sin^2 x+\cos^2 x=1,1+\tan^2 x=\sec^2 x,1+\cot^2 x=\csc^2 x$;

和差化积公式

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2},\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

半角公式

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2},\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2},\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

6.反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在主值区间$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上的反函数,(如图1.3－9),其定义域为$[-1,1]$,值域为$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$,它是奇函数且单调增加.

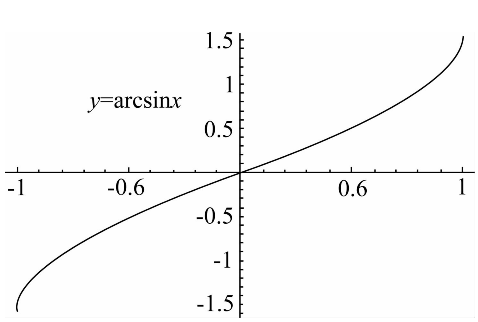

图 1.3－9

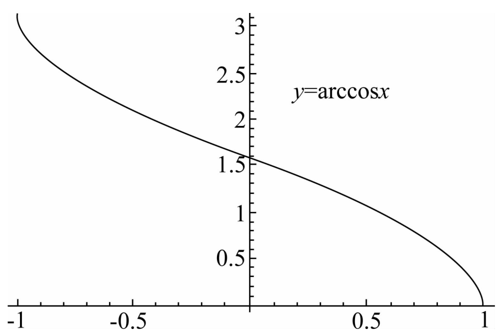

图 1.3－10

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在主值区间$[0,\pi]$上的反函数(如图1.3－10),其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,它不具有奇偶性是单调减少的.

反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在主值区间$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$上的反函数,(如图

1.3—11),其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,它是奇函数且单调增加.

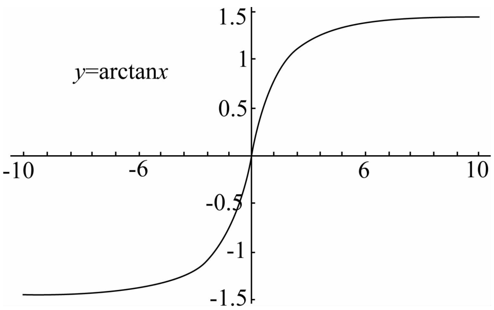

图 1.3—11

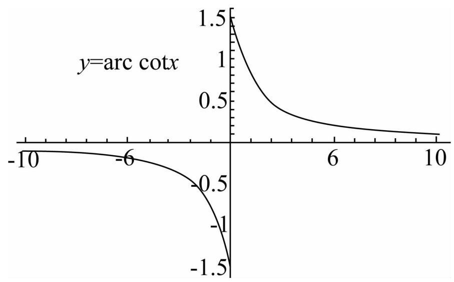

图 1.3—12

反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 是余切函数 $y=\cot x$ 在主值区间$(0,\pi)$上的反函数,(如图 1.3—12),其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$,它不具有奇偶性是单调减少的.

二、初等函数

定义 1 基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合生成的函数称为初等函数.如双曲函数,双曲正弦 $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;双曲余弦 $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,双曲正切 $thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$等都是初等函数.

双曲函数重要公式:

$sh(x+y)=shxchy+chxshy$;$sh(x-y)=shxchy-chxshy$;

$ch(x+y)=chxchy+shxshy$;$ch^2x-sh^2x=1$;

$sh2x=2shxchx$;$ch2x=ch^2x+sh^2x$.

再如,$y=\ln\frac{(1-x)e^x}{\arccos x}$,$y=\sqrt{\sin[1+\ln^2(2x+1)]}$等也都是初等函数.

习题 1.3

1.将下列函数分解成基本初等函数或基本初等函数经过四则运算而复合的形式:

(1)$y=\arccos\frac{3x+1}{2}$;　　(2)$y=e^{(\frac{1-x^2}{1+x^2})^{\frac{1}{2}}}$.

(3)$y=\sin^2\sqrt{x}$;　　(4)$y=e^{\arctan x^2}$

2.验证函数 $y=\sin x$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上单调增加.

3.求函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数.

第二章　极限与连续

微积分是一门以变量作为研究对象、以极限方法作为基本研究手段的数学学科.极限是微积分的理论基础,导数、微分、积分以及级数等都是建立在极限概念基础上的.以前我们只以直观和形象的语言对极限的概念进行了描述,并没有给出精确的数学定义.本章研究数列极限与函数极限的精确定义、极限的性质及基本计算方法;介绍无穷小量无穷大量等概念,在此基础上研究函数的连续性.

2.1　极限的定义

一、数列的极限

1.数列

一列无穷多个数称为无穷数列,简称数列,记作$\{x_n\}$.数列中的每一个数叫做数列的项.第n项x_n叫做数列的一般项或通项.

数列实质是定义在自然数集N上的函数,即

$$f:N \to R\ ,\ x_1 = f(1), x_2 = f(2), \cdots, x_n = f(n), \cdots.$$

例1　下列均为数列

(1)$\{\frac{n}{n+1}\}$:$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$;

(2)$\{2n,\}$:$0,2,4,\cdots,2n,\cdots$;

(3)$\{(-1)^{n+1}\}$:$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$;

(4)$\{\frac{1}{n}\}$:$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$;

(5)$\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\}$:$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$;

(6)$\{a\}$:$a,a,a,\cdots,a,\cdots$.

对于一个给定的数列$\{x_n\}$,考察当n无限增大时(记作$n\to\infty$),它的项的变化趋势.从例1中的6个数列来看:

随n增大,数列(1)的各项值越来越与1接近;数列(2)的各项值越变越大,而且无限增大;数列(3)的各项值交互取得1与-1两数,而不是越来越与某一数接近;数列(4)的各项值越来越与0接近;数列(5)的各项值在数0两边跳跃,越来越与0接近;数列(6)的各项值都相同.

2. 数列的极限

定义 1(描述性定义)　设数列$\{x_n\}$，当$n\to\infty$时，如果数列的通项x_n无限趋近于某个常数A，则称常数A为数列$\{x_n\}$的极限，数列$\{x_n\}$称为收敛数列. 例 1 中数列(1)、(4)、(5)、(6) 就是收敛数列，它们的极限分别为$1,0,0,a$.

若数列$\{x_n\}$的极限为A，意味着当n无限增大时，x_n无限地接近于A. 在数学上用距离来表示接近程度，即用$|x_n-A|$来刻画x_n接近A的程度. 因为n越大，x_n越接近于A，即$|x_n-A|$越小，所以对任意的正数ε，在适当的N之后，$|x_n-A|$小于指定的正数ε，这便是极限的数学定义.

定义 2(精确性定义)　设$\{x_n\}$是一个数列，A是常数. 若对于任意给定的正数ε，总存在一个正整数N，使得当$n>N$时，不等式$|x_n-A|<\varepsilon$恒成立，则称常数A为数列x_n的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A(n\to\infty)$. 这时我们说该数列是收敛的，否则，称$\{x_n\}$的极限不存在，或称$\{x_n\}$发散.

如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则在任意一个以$A$为中心、$\varepsilon$为半径的邻域$U(A,\varepsilon)$内，数列中总存在着一项$x_N$，在此项后面的所有项$x_{N+1},x_{N+2},\cdots$(即除了前$N$项以外)，它们在数轴上对应的点，都位于邻域$U(A,\varepsilon)$中，(如图 2.1－1). 因为$\varepsilon>0$可以任意小，所以数列中各项所对应的点$x_n$都无限集聚在点$A$附近. 这便是数列极限的几何意义.

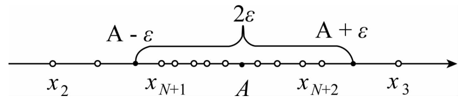

图 2.1－1

对于该定义需要注意以下几点：

(1)ε：是预先给定的任意小的正数，要多小就有多小，其小的程度没有限制，只有这样，不等式$|x_n-A|<\varepsilon$才能表达出“不论x_n多么接近于A”的要求，它刻画了x_n与A的接近程度；

(2)N：是依赖于ε的给定而确定的，随着ε的变化而变化，它指出了一个位置，只要n增大的过程到达这一步以后，就有$|x_n-A|<\varepsilon$，即实现了“x_n接近于A”，而且它是不唯一的.

例 2　用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

证明　任意给定$\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时，必有$\left|\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. 即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

例 3　当$|r|<1$时，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使$|r^n|=|r|^n<\varepsilon$成立，只须$n\ln|r|<\ln\varepsilon$. 由于$|r|<1$，

故$\ln|r|<0$，有$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}$. 取$N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}\right]$，则当$n>N$时，必有$|r^n|<\varepsilon$，

即$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0(|r|<1)$.

3. 数列极限的性质

定理 1(唯一性)　若数列$\{x_n\}$极限存在，则其必唯一.

证明　设极限不唯一，令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，而$a\neq b$，不妨设$a<b$. 当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$时，取$\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，由数列收敛的定义，知存在$N_1$，从第$N_1+1$项开始，以后的各项均要落在$U\left(a,\dfrac{b-a}{2}\right)$内，即$x_n<a+\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{a+b}{2}(n>N_1)$. 同理，当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$时，存在$N_2$，从第$N_2$

$+1$ 项开始,以后的各项均要落在 $U\left(b,\frac{b-a}{2}\right)$ 内,即 $x_n > b-\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}(n>N_2)$,从而当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时,有 $\frac{a+b}{2}<x_n<\frac{a+b}{2}$,矛盾,故唯一性定理成立.

如例 1(3) 数列 $\{(-1)^n\}$ 极限不存在.

定理 2(有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则必是有界数列.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,由极限定义,取 $\varepsilon=1$,则一定存在 N,从第 $N+1$ 项开始,以后的各项均要落在 $U(a,1)$ 内,而在 $U(a,1)$ 外仅有有限多个 x_n[即 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 可能在 $U(a,1)$ 外],取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$,则必有 $x_n\in[-M,M]$,$n=1,2,\cdots$,即数列 $\{x_n\}$ 是有界数列.

与定理 2 等价的结论是:若数列 $\{x_n\}$ 是无界数列,则 $\{x_n\}$ 发散,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

如,数列 $x_n=n^2$ 是无界数列,故 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 不存在.同样的,例 1(2) 数列 $\{2n\}$ 的极限也不存在.

定理 3(保序性) 设 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$,则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $x_n>y_n$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,且 $a>b$.取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$,作邻域 $U\left(a,\frac{b-a}{2}\right)$,$U\left(b,\frac{b-a}{2}\right)$,则必存在 N,当 $n>N$ 时,$x_n\in U\left(a,\frac{a-b}{2}\right)$,即 $x_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$;且 $y_n\in U\left(b,\frac{a-b}{2}\right)$,即 $y_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$.故当 $n>N$ 时,有 $y_n<\frac{a+b}{2}<x_n$ 或 $y_n<x_n$,即结论成立.

推论 1(保号性) 设 $\{x_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n<0$),则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

推论 2 设 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 的极限存在,若 $x_n\leqslant y_n$(当 $n>N$ 时),则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.特别地,若 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$),则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant 0$).

说明 在推论 2 中,若 $x_n<y_n$,也只能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.如:$x_n=\frac{1}{n}>0$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

二、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

引例,函数 $f(x)=\frac{1}{x}$,当 $x\to\infty$ 时,$f(x)$ 无限地接近于数 0,则称数 0 是 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,(如图 2.1-2).

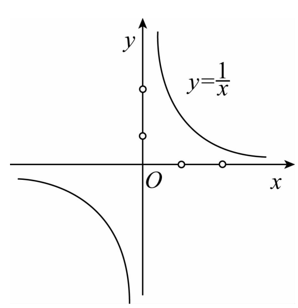

图 2.1-2

一般地,有下面的描述性定义.

定义 3(描述性定义) 设 $f(x)$ 对于充分大的 $|x|$ 来说有定义,当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于某个常数 A,则称常数 A

为 x 无限增大时 $f(x)$ 的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

定义 4(精确性定义)　设 $f(x)$ 对于充分大的 $|x|$ 来说有定义，A 是常数. 若对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 X，当 $|x|>X$ 时，使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$. 这时我们说函数是收敛的，否则称函数是发散的.

注意，① 定义 4 中的 ε 刻画了函数 $f(x)$ 与 A 的接近程度；②X 刻画了 $|x|$ 充分大的程度，(如图 2.1－3).

上述定义可记为：

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

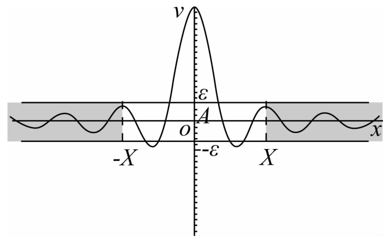

图 2.1－3

考虑 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，只要将定义 4 中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$；同理当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，只要将定义 4 中的 $|x|>X$ 改为 $x<-X$ 即可.

为了明显地看到它们的异同，将 $x\to-\infty,x\to+\infty,x\to\infty$ 时的函数极限的定义对比如下：

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x>X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$；

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x<-X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x,|x|>X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

于是得到结论：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 4　用定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$，只要 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 就可以了. 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

例 5　证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$.

证明　不妨设 $x>1,\forall\varepsilon>0$，要使不等式 $\left|\dfrac{x+1}{x-1}-1\right|=\dfrac{2}{x-1}<\varepsilon$ 成立，

解得 $x>\dfrac{2}{\varepsilon}+1$，取 $X=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$. 于是 $\forall\varepsilon>0,\exists X=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$，当 $\forall x>X$，有 $\left|\dfrac{x+1}{x-1}-1\right|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

引例　函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. 当 $x\neq2$ 时，$f(x)=x+2$. 由此可见，当 x 不等于 2 而趋于 2 时，对应的函数值 $f(x)$ 就趋于 4.

不难看出，引例与 $x\to\infty$ 时的极限存在情形相似，这里是“当 x 趋近于 x_0 且 $x\neq x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于某一确定的常数 A”.

定义 5(描述性定义) $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，当 x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某个常数 A，则称常数 A 为 x 无限趋近于 x_0 时 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

定义 6(精确性定义) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，A 是常数，若对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 x 无限趋近于 x_0 时 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$. 这时我们说函数 $f(x)$ 是收敛的，否则称函数 $f(x)$ 是发散的.

上述定义可记为：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注意，在此极限定义中，“$0<|x-x_0|<\delta$” 指出了 $x\neq x_0$，说明函数 $f(x)$ 在 x_0 的极限与函数 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义无关.

考虑 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，只要将定义 6 中的 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x-x_0<\delta$；同理当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，只要将定义 6 中的 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x_0-x<\delta$ 即可.

为了明显地看到它们的异同，将 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0$ 时的函数极限的定义对比如下：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

于是得到：

定理 4 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

例 6 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon$ 成立，只须取 $\delta=\varepsilon$，于是对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，都有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

由定义 6 表明，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，任意画一条以直线 $y=A$ 为中心线，宽为 2ε 的横带(无论怎样窄)，必存在一条以 $x=x_0$ 为中心，宽为 2δ 的直带，使直带内的函数图象全部落在横带内，(如图 2.1－4).

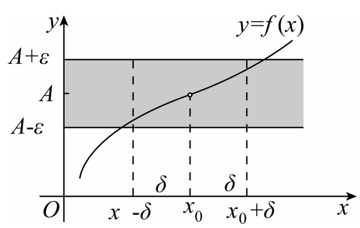

图 2.1－4

例 7 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$，其中 c 为一常数.

证明 由于 $|f(x)-A|=|c-c|=0$，所以对于任意给定的正数 ε，任取一正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都能有

$|f(x)-A|=0<\varepsilon$ 成立. 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

例 8　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

证明　由于 $|f(x)-A|=|x-x_0|$, 所以对于任意给定的正数 ε, 取正数 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 都有 $|f(x)-A|=|x-x_0|<\varepsilon$ 成立. 故 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

例 9　设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0,\\ 0 & x=0,\\ x+1 & x>0.\end{cases}$ 研究当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 的极限.

解　当 $x<0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$,

而当 $x>0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x+1=1$.

左、右极限都存在但不相等, 所以由定理 4 知, 当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 不存在极限.

例 10　研究当 $x\to 0$ 时, $f(x)=|x|$ 的极限.

解　$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$. 所以由定理 4 可知, $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

3. 函数极限的性质

定理 5　若 $\lim f(x)$ 存在, 则其极限必唯一. 其中"lim"表示任一极限过程.

定理 6　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ [或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$] 存在, 则函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ [或 $(-\infty,-M)$ 和 $(M,+\infty)$] 内均是有界的.

定理 7　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ [或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$], 且 $A>0$ [或 $A<0$], 则函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ [或 $(-\infty,-M)$ 和 $(M,+\infty)$] 内 $f(x)>0$ [或 $f(x)<0$].

定理 8　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ [或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$], 且 $f(x)\geqslant 0$ [或 $f(x)\leqslant 0$], 则 $A\geqslant 0$ [或 $A\leqslant 0$].

注　定理 8 中即使 $f(x)>0$ [或 $f(x)<0$], 也得到 $A\geqslant 0$ [或 $A\leqslant 0$].

习题 2.1

1. 观察下列数列的变化趋势, 判别哪些数列有极限. 如有极限, 写出它们的极限:

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$;　　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$;

(3) $x_n=1+\dfrac{1}{n^2}$;　　(4) $x_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

2. 用数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+2}{2n+3}=2$.

3. 观察下列函数在自变量的给定变化趋势下是否有极限, 如有极限, 写出它们的极限:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x\to 0)$;　　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\ (x\to+\infty)$;

(3) $f(x)=\ln x(x\to 0^+)$；　　　　(4) $f(x)=\operatorname{arccot}x(x\to-\infty)$.

4.用函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{4x^2}=\dfrac{1}{2}$.

5.求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 极限是否存在。

6.设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0, \\ x+a & x\geqslant 0. \end{cases}$　问常数 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

2.2　无穷小量与无穷大量

在极限研究中，以零为极限的函数在极限理论中扮演着十分重要的角色，下面我们进行专门的讨论.

一、无穷小量

定义 1　若 $\lim\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$ 是该极限过程中的一个无穷小量.其中省去 $x\to x_0$，$x\to\infty$ 等极限过程的符号，“lim” 表示任一极限过程.

以 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小量为例，可以用极限定义作如下表述：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon$.

例如，当 $x\to 0$ 时，函数 x^3，$\sin x$，$\tan x$ 都是无穷小；当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\dfrac{1}{x^2}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$ 都是无穷小.

注　(1) 以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 也称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

(2) 任何非零常数都不能称为无穷小量，不要把无穷小量与非常小的数混淆.

(3) 常数中只有 0 是任何极限过程中的无穷小量.

根据极限定义，得到无穷小量与函数极限之间的关系：

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 是无穷小量.

证明　必要性　因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，令 $\alpha(x)=f(x)-A$，由定义知，$\alpha(x)=f(x)-A$ 是无穷小量.

充分性　设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 是无穷小量.则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|=|\alpha(x)|<\varepsilon$.所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定理 2　有限个无穷小量的代数和是无穷小量.

证明　以两个无穷小在 $x\to x_0$ 时为例.设 α，β 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$，故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个共有的 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|\beta|<$

$\frac{\varepsilon}{2}$,从而$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,即$\alpha+\beta$是$x \to x_0$的无穷小.

如,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=0$,但是无限个无穷小之和不一定,如$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$.

定理3　有界变量与无穷小量的乘积还是无穷小量.

证明　由于y在$\mathring{U}(x_0,\delta_1)$内是有界的,即$\exists M>0$,对于$\forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$时,$|y| \leqslant M$. 又当设$x \to x_0$时,$\alpha$是无穷小量,有$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$,于是$\forall \varepsilon>0$,$\exists \delta_2>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$. 取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$0<|x-x_0|<\delta$时,

$$|y \cdot \alpha| \leqslant |y| \cdot |\alpha|<M \cdot \frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

即当$x \to x_0$时,$y \cdot \alpha$也是无穷小量.

定理4　有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

定理4的证明留给读者.

例如,$\lim\limits_{x\to 0}x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$. 由于$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$,由定理3知,$\lim\limits_{x\to 0}x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}=0$.

二、无穷小量的阶

两个无穷小量的和、差及乘积仍是无穷小,但两个无穷小量的商,却会出现不同的情况,例如,当$x \to 0$时,$2x$,x^2是无穷小量,$x \to$时,x^2-3x+2,x^2-x-2是无穷小,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0,\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty,\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}.$$

两个无穷小之比的极限的各种不同情况,反映了不同的无穷小趋于零的快慢程度,就例子来说,在$x \to 0$的过程中,x^2比$2x$快些$x \to 2$时;x^2-3x+2与x^2-x-2的快慢相仿.

下面通过无穷小量之比的极限,说明两个无穷小趋于零的速度快慢.

定义2　设$x \to x_0$时,α与β都是无穷小,且$\beta \neq 0$.

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=0$,则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小,记为$\alpha=o(\beta)$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称$\alpha$是比$\beta$低阶的无穷小.

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=b \neq 0$,则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小.

(4) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1$,则称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小,记为$\alpha \sim \beta$.

例如,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}=1$,得到$x \to 0$时,$\sqrt{1+x}-1$与$\frac{x}{2}$是等价的无穷小量.

三、无穷大量

如果当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时,对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大,就说$f(x)$当$x \to$

x_0(或 $x\to\infty$) 时是无穷大,其严格定义如下:

定义 3 如果对任意给定的正数 M(不论它有多么大),总存在正数 δ(或正数 X),使得当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$) 时, $f(x)$ 满足

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大量,记作: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

注意 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$ 只是借用极限符号来表述函数的这一变化趋势,尽管我们也说"函数的极限是无穷大",但并不意味着函数 $f(x)$ 存在极限.

(2) 无穷大不是一个数,不可把它与很大的数混为一谈.

(3) 无穷大与无界量不同,如数列 $1,0\quad 2,0,\cdots,n,0,\cdots$ 是无界的,但不是 $n\to\infty$ 时的无穷大.

(4) 若定义中 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$ 或 $f(x)<-M$,则称 $f(x)$ 是正或负无穷大量,记作 $\lim f(x)=+\infty$ 或 $\lim f(x)=-\infty$.

定理 5 (1) 如果当 $x\to x_0$ 或 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$ 是无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小;(2) 若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 或 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

证明 只证明当 $x\to x_0$ 时,(2) 中情况. $\forall M>0$,由于当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 是无穷小,对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|<\dfrac{1}{M}$ 或 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>M$. 即当 $x\to x_0$ 时,函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

习题 2.2

1. 下列函数在自变量如何变化时是无穷小,在自变量如何变化时是无穷大.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{2+x}$;

(3) $y=\ln x$;　　(4) $y=e^x$.

2. 下列函数哪些是该极限过程中的无穷小量,哪些是该极限过程中的无穷大量.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}, x\to 1$;　　(2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}, x\to 0^+, x\to 0^-$;

(3) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}, x\to 0$;　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x, x\to\infty$.

2.3 极限的运算法则

一、函数极限的四则运算

定理 1 设 $\lim f(x)=a$, $\lim g(x)=b$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$;

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=ab$;

(3) 当 $b\neq 0$ 时,$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

证明　以(2)的情形证之.

由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$,根据2.2节定理1知,$f(x)=a+\alpha(x)$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$;同理由$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$,$g(x)=b+\beta(x)$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.所以有

$$f(x)g(x)=(a+\alpha(x))(b+\beta(x))=ab+a\beta(x)+b\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$$

由于$x\to x_0$时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$为无穷小量,得到$\alpha(x)\cdot\beta(x)$为无穷小量.即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=ab$.

注意,定理1的"lim"下方没有标明自变量的变化过程,意思是指以上定理对自变量的任何一种变换过程都成立;定理1的(1)、(2)可推广到有限多个函数的和或积的情形;作为(2)的特殊情形,我们有

推论1　(1) $\lim cf(x)=c\lim f(x)$,(2) $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

例1　求下列多项式的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n)$.其中$a_0,a_1,\cdots,a_n$是常数.

解
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\\&=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lim_{x\to x_0}x+a_n\\&=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n.\end{aligned}$$

结论　多项式函数$p(x)$当$x\to x_0$极限为$p(x_0)$.

例2　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-1}$.

解
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+3x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x-\lim\limits_{x\to 2}1}$$
$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-\lim\limits_{x\to 2}1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}1}=\frac{2^2-1}{2^2+3\cdot 2-1}=\frac{1}{3}.$$

例3　求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{9-x^2}$.

解　当$x\to 3$时,$x\neq 3$,所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{9-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(3-x)(3+x)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{3+x}=\frac{1}{6}.$$

例4　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2-2}{6x^3+5x^2-3}$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2-2}{6x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^3}}{6+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{1}{2}.$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^3+x^2-2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^3-x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=\frac{0}{3}=0.$$

对于 $x\to\infty$ 时,多项式之比的极限,通常的做法是分子、分母同除以分母的最高次项.

结论 当 $a_0,b_0\neq 0$ 时

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & \text{当 } m=n\\ 0 & \text{当 } m<n\\ \infty & \text{当 } m>n\end{cases}$$

二、复合函数的极限运算法则

定理 2 设$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$,且在 x_0 的某去心邻域内 $u(x)\neq u_0$,则复合函数 $f[u(x)]$当 $x\to x_0$ 时的极限存在,且

$$\lim_{x\to x_0}f[u(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

注 该法则对 $x\to\infty$ 仍然适用.

例 6 求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x-a}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(\ln x)$.

解 (1) $\sqrt{x-a}$ 可以看作 $f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=x-a$ 复合而成.当 $x\to a$ 时,有 $u\to 0$,并且 $\lim\limits_{u\to 0}\sqrt{u}=0$,因而$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x-a}=\lim\limits_{u\to 0}\sqrt{u}=0$.

(2)$\sin(\ln x)$可看作 $f(u)=\sin u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成.当 $x\to 1$ 时,$u\to 0$,则$\lim\limits_{x\to 1}\sin(\ln x)=\lim\limits_{u\to 0}\sin u=0$.

习题 2.3

1.求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3+x^2}{x^2-2}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$;

(7) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$; (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{3x^2+2x+4}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+1}{2x^4+3x^2}$; (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2+5}{x^2+2x}$.

2.4　极限存在准则

本节介绍极限存在的两个准则及计算极限的两个重要极限，它们在判别极限的存在性及求极限的时候占有十分重要的地位.

一、极限存在准则

1. 夹逼准则

定理 1　设在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,r)$ 中，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证明　按定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，故存在 $\delta_1>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时，有 $|g(x)-A|<\varepsilon$，就有

$$-\varepsilon<g(x)-A.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，故存在 $\delta_2>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时，有 $|h(x)-A|<\varepsilon$，就有

$$h(x)-A<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,r\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，不等式 $-\varepsilon<g(x)-A$，$h(x)-A<\varepsilon$ 同时成立，并注意到条件

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

就得

$$-\varepsilon<g(x)-A\leqslant f(x)-A\leqslant h(x)-A<\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

从而证明了

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

注　该准则对于 $x\to\infty$ 或者数列仍然成立.

例 1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 由于 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，由夹逼准则，得

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

2. 单调有界收敛准则

定理 2　若数列 $\{x_n\}$ 单调增加，即 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots$，且其有上界；或者 $\{x_n\}$ 单调减

小，即 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$，且其有下界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

对于定理 2，我们不做证明. 另外，这两个极限存在准则只是极限存在的充分条件.

例 2 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right), (n = 1, 2, \cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求之.

解 显然 $x_n > 0$，且 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} = 1$. 从而

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} - x_n\right) = \frac{1 - x_n^2}{2x_n} \leqslant 0$

即$\{x_{n+1}\}$ 单调递减有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，由 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$，令 $n \to \infty$，得

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right),$$

解得，$A^2 = 1$，即 $A = \pm 1$，因 $x_{n+1} \geqslant 1$，由保号性定理知 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} \geqslant 1$，故 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

二、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

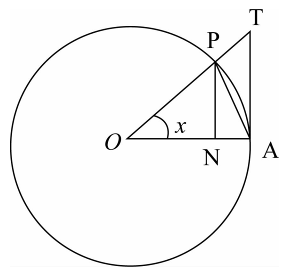

图 2.3－1

证明 作一单位圆. 设 $\angle AOP = x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$，(如图 2.3－1). 点 A 处的切线 AT 与 OP 的延长线交于点 T，作 $PN \perp OA$. 显然有 ΔOAP 的面积 < 扇形 OAP 的面积 < ΔOAT 的面积，即$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$. 以$\frac{1}{2}\sin x$ 除以各项，得 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$，对此不等式的每项取倒数，易知 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. 由 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的奇偶性可知，$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时，该不等式仍成立，即当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. 于是由夹逼定理得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

由$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，得到$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. 且当 $x \to 0$ 时，有 $\sin x \sim x$.

例 3 求$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} (a \neq 0)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a\sin ax}{ax} = a \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = a$.

例 4 求$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$.

亦即当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

亦即，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解 令 $u=\arcsin x$，当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$，于是

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$，

亦即，当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$. 同理，当 $x\to 0$ 时，$\arctan x\sim x$.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. 这里 e 为自然对数的底，是一个无理数 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$. 证明从略. 易知 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{-x\cdot(-1)}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{-x}]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x+1})^{x+2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\dfrac{1}{x})^{-x}]^{(-\frac{1}{x})(x+2)}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\dfrac{1}{x})^{-x}]^{\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{x+2}{x})}=\mathrm{e}^{-1}$.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-1}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

在研究两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用等价的无穷小来代替.

定理 3 设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证明 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\dfrac{\beta'}{\alpha'}\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

例 11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 当 $x \to 0$ 时，$\tan 2x \sim 2x$，$\sin 5x \sim 5x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

例 12 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2 + 3x}$.

解 当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$. 于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(x+3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}.$$

最后将常见的等价无穷小作一归纳，我们会在后面章节中陆续给出另外一些等价无穷小。

当 $x \to 0$ 时，

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$；$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

习题 2.4

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{\tan x}$；　　(4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cot \sqrt{x}$；

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$；　　(6) $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \sin \frac{2x}{n}$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+2}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$；

(5) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{2\csc x}$；　　(6) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \tan x)^{2\cot x}$.

3. 利用夹逼准则证明：$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$.

4. 利用等价无穷小量，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan 4x}{\arcsin 2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$（$m, n$ 为正整数）.

2.5 函数的连续性

现实世界中的许多变量都是连续变化的. 例如气温、物体运动的路程等，都可以看成是时间 t 的函数. 在很短的时间内，这些变量的相应变化很小，这反映在数学上就是函数的连续性，它是

与函数极限概念密切相关的另一基本概念.

也有一些与之相反的现象,如发射三级火箭,在它升空的过程中,随着火箭燃料的消耗,火箭质量逐渐变小,当每一级火箭的燃料耗尽时,火箭就要进行分离,于是质量突然从一个值跳过所有中间值减少为另一个值,即在此时发生了间断.

一、函数连续性的概念

1. 函数在一点处连续的定义

先引入函数改变量的概念.

设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义,自变量 x 由 x_0 变到 x_1,则差 x_1-x_0 称为自变量的改变量,记为 Δx,这时 $x_1=x_0+\Delta x$. 于是自变量由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$,又可表述为"自变量在 x_0 处产生一个改变量 Δx". 此时相应的函数由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,则称差 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的改变量,记为 Δy,即 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.(如图 2.5-1).

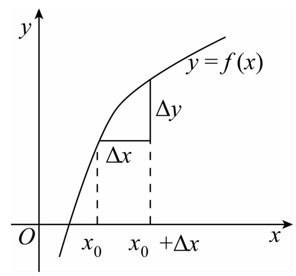

图 2.5-1

注意,Δx,Δy 是完整的记号,它们可正、可负、也可为 0.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义,如果当自变量改变量 Δx 趋于 0 时,相应的函数改变量 Δy 也趋于 0. 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续.

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))]=0$,令 $x=x_0+\Delta x$,则 $\Delta x\to 0$ 时,$x\to x_0$,有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 于是,得到定义 1 的另一种定义形式:

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续.

定义 3　单侧连续

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta]$ 内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续;

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0]$ 内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续;

定理 1　函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 既是左连续又是右连续,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

例 1　证明 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

证明　任取 $x_0\in R$,当自变量在 x_0 处增量 Δx,对应的函数的增量

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$,$\left|\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\right|\leqslant 1$,根据 2.2 节定理 3,有界变量与无穷小量的乘积还是无穷小量. 得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

即 $f(x)=\sin x$ 在 x_0 点连续. 又由 x_0 的任意性,故 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

例 2 研究函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x\geqslant 0\\ x-2, x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x+2=2=f(0)$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x-2=-2$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右连续,左不连续.

2. 区间上的连续函数

定义 4 若函数在区间(a,b)上每一点都连续,则称 $f(x)$ 是该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续. 如果 $f(x)$ 同时在 $x=a$ 处右连续,在 $x=b$ 左连续,则称函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$连续,记作 $f(x)\in C[a,b]$.

从几何直观上看,在一个区间上连续的函数的图形是一条不间断的曲线.

二、函数的间断点

定义 5 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 间断,x_0 称为间断点.

若 $f(x)$ 在 x_0 间断必为以下三种情形之一:

(1)$f(x)$ 在 x_0 处无定义;

(2)$f(x)$ 在 x_0 处有定义,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;

(3) 虽然 $f(x)$ 在 x_0 处有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

下面举例说明函数间断点的几种类型.

例如,①$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$,由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 点无定义,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 点间断;②$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\leqslant 1,\\ x & x>1.\end{cases}$ $f(1)=0$,而 $f(1-0)=0$,$f(1+0)=1$,得到$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 点间断;③$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$,$f(0)=1$,而$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点间断.

设 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点,如果 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限存在,则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点,如果 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$,则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**可去间断点**;如果 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

上面例子中 ①、③ 是第一类可去间断点,② 是第一类跳跃间断点.

如果 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限中至少有一个不存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**无穷间断点**;如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 为非无穷大的不存在,则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**振荡间断点**.

例 3 研究下列函数的间断点,并指明类型.

(1) $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0, \\ 0 & x=0, \\ x+1 & x>0. \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2x} & x\neq 0, \\ 0 & x=0. \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0, \\ 0 & x=0. \end{cases}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，所以 $x=0$ 是第一类的跳跃间断点，(如图 2.5－2).

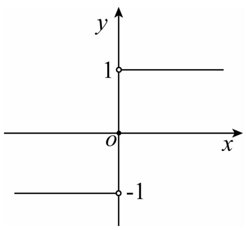

图 2.5－2

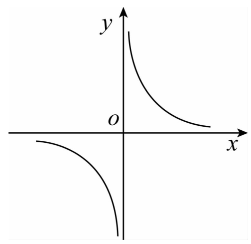

图 2.5－3

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x}=\infty$，故 $x=0$ 是第二类无穷间断点，(如图 2.5－3).

(3) 由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在(且非$\infty$)，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类振荡间断点，(如图 2.5－4).

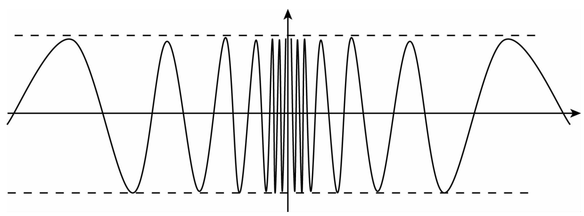

图 2.5－4

三、连续函数的运算

由函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则，可得下面结论：

定理 2　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 点连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在 x_0 也连续.

由复合函数极限运算法则，可得下面结论：

定理 3　设函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，又函数 $z=f(u)$ 在 u_0 点连续，则复合函数 $z=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点连续.

由于$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$，可知在连续的条件下，极限符号和函数符号可以交换次序.

定理 4　严格单调增加(或减少)的连续函数的反函数也是严格单调增加(或减少)的连续函数.(证明从略)

综合定理 2、定理 3、定理 4 可得如下结论：

定理 5　初等函数在定义区间内是连续的.

例 4　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}=2^1=2.$

例 5 求$\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x})$

解 $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x})=\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x-3}+\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{5-x}=1+1=2.$

例 6 求$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{1+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\dfrac{1}{x})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\dfrac{1}{x})^x=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$

$=\ln e=1.$

例 6 中，令 $t=\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}$. 易知，

$t\to 0,\ln(1+t)\sim t.$

例 7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0,a\neq 1)$

解 令 $t=a^x-1$，$x=\log_a(t+1)$，得到

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(t+1)}=\dfrac{1}{\log_a\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}}=\dfrac{1}{\log_a e}=\ln a$. 可知 $a^x-1\sim x\ln a$，$\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}$

如果 $a=e$，得到$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，亦有 $x\to 0$，$e^x-1\sim x$.

四、闭区间上连续函数的性质

定理 6 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则

(1)(有界性定理) $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

(2)(最值定理) $f(x)$ 在$[a,b]$上必有最小值和最大值.

(3)(零点定理) 若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

(4)(介值定理) 在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=c$.(M 与 m 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值和最小值，c 是 M,m 间任意数.)

证明 以(4)为例证明. 如果 $m=M$，则函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上是常数，定理显然成立. 如果 $m<M$，则在$[a,b]$上必存在两点 x_1 和 x_2，使 $f(x_1)=M$，$f(x_2)=m$ 不妨设 $x_1<x_2$. 作函数 $\varphi(x)=f(x)-c$，则 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$连续，且有

$$\varphi(x_1)=f(x_1)-c>0,\varphi(x_2)=f(x_2)-c<0$$

由零点存在定理，在区间(x_1,x_2)内至少存在一点 ξ，使 $\varphi(\xi)=f(\xi)-c=0$，即 $f(\xi)=c$，(如图 2.5－5).

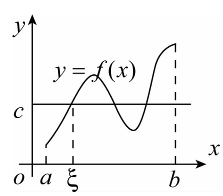

图 2.5－5

注意，(1) 如果把定理条件换成开区间上连续，结论不一定成立. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在(0,1)