目　录

第一章　质点力学

引言

在物质的千变万化、各式各样的运动中，有一类是人们经常遇到的最简单、最基本的运动形式，这就是机械运动。机械运动是指物体间或物体各部分之间的相对位置的变化，力学就是研究机械运动的规律及其应用的学科。在力学中，只描述物体在空间位置如何随时间变化，而不涉及物体运动原因的部分称为运动学；探讨物体在运动过程中同周围其它物体的相互作用，以及这些作用对物体运动产生的影响的部分称为动力学。在本章中，着重介绍质点力学的基本概念、基本物理量，以及质点运动学和动力学的基本规律。

§1—1　质点运动学

本节将讨论质点的运动学问题，总结质点的运动学规律，而不考虑质点运动的原因。主要包括质点的位置矢量、位移、速度、加速度之间的矢量关系以及在坐标系下的表示，并讨论质点匀变速圆周运动、相对运动等内容。

一、基本概念

（一）质点

在自然界中，任何宏观的实际物体都有一定的大小和形状，而且受外界影响很大，当研究宏观物体的机械运动规律时，物体的运动可能很复杂，在运动时，物体上各点的位置变动通常也不尽相同，同时，物体本身的大小和形状也可能不断改变，导致研究无从下手。所以，要详细描述物体的运动并不容易。例如，在研究地球围绕太阳公转时，除了地球公转以外，它还在做自转，实际上，当我们研究地球围绕太阳公转这一问题时，研究的目标是地球整体的运动，而地球与太阳之间的距离是地球直径的一万多倍，因此，就可以忽略地球的自转、地球表面的火山喷发、潮水涨落等次要因素，把物体上各点的运动都看成完全一样。这时就不需要考虑物体的大小和形状，物体的运动可用一个点的运动来代表。这种把物体抽象为没有体积和形状，只具有物体全部质量的几何点，称为质点。质点是一个具有质量的点，是一种对实际物体的一种科学抽象和简化的模型。

理想化模型的建立需要根据实际研究的问题而定，例如，同样是地球，在研究它绕太阳公转时，可以将它看做质点；在研究它的自转问题时，就不能把它看做质点。另外，当物体单纯地只做平移运动时，物体上各点的运动情况都完全相同，可以把它简化成一个质点来看待。因此，研究物体的运动时，物体质量的大小或者体积的大小不能作为物体是否视为质点的标准，同一个物体在一种问题中不能被看成质点，而在另一种问题中可能就可以被看成质点，所以具体问题要具体分析。

（二）参考系和坐标系

1. 参考系

研究物体的机械运动，也就是研究物体间相对位置的变化。在自然界中所有的物体都在不

停地运动，绝对静止不动的物体是没有的，这就是说任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的。在观察一个物体的位置及位置变化时，总要选取其他物体作为标准，选取的标准物不同，对物体运动情况的描述结果也不同，因此物体的运动具有相对性。为描述物体的运动而选的物体或物体系叫做参考系。

不同的参考系对同一物体运动情况的描述（如轨迹、速度等）是不同的。因此，在描述物体运动情况时，须要指明是对什么参考系而言的。例如，一个自由下落的石块的运动，在地面参考系中观察，它做的是直线运动。如果在近旁驰过的车厢内观察，即以行进的车厢为参考系，则石块作曲线运动。参考系的选择是任意的，在讨论地面上物体的运动时，通常选用固定在地面上的一些物体作为参考系，这样的参考系叫做地面参考系。

2. 坐标系

参考系确定后，要定量地描述质点相对于参考系的位置，需要在参考系上建立固定的坐标系。参考系选定后，坐标系还可以任意选，坐标系一旦与参考系固联在一起，则物体相对于坐标系的运动，也就是相对于参考系的运动。在同一个参考系中用不同的坐标系描述同一运动，物体的运动情况相同，但描述运动的数学表达式可以不同。常用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系等。

直角坐标系是最常用的坐标系，在直角坐标系中通常用$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$表示沿x，y，z三个坐标轴正方向的单位矢量。如图1.1所示，设某时刻质点在P点，建立一个固结在参考系上的三维直角坐标系$O-xyz$，因此P点的位置就可以用直角坐标$P(x,y,z)$来确定。在二维空间所取的平面直角坐标系$O-xy$中，用两个坐标$P(x,y)$即可确定物体的位置；在一维空间中所取的直线坐标轴$O-x$或$O-y$上，用一个坐标x或y即可确定物体的位置。

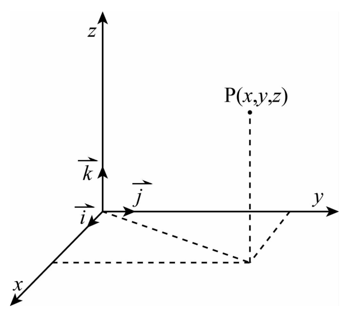


图1.1　直角坐标系

还有一种常见的坐标系即自然坐标系，在质点作曲线运动，而且已知运动轨迹的情况下，可采用自然坐标系。在自然坐标系中，可以选定轨迹上任意一点o为坐标原点，用质点的轨迹长度来描述质点的位置，规定两个依赖质点位置的相互正交的单位矢量描述质点的运动：如图1.2所示，一个是该点沿轨迹切线方向的单位矢量$\vec{t}$；另一个是在该点与切线相交，并指向轨迹曲线凹侧的法线单位矢量$\vec{n}$。当质点在做平面曲线运动的情况下，采用自然坐标系比采用直角坐标系显得更为方便。虽然，坐标系与参考系有联系，但两者不能混同。参考系是实物，而坐标系是参考系的数学抽象。因此，当我们建立了坐标系，就意味着参考系也已选定。

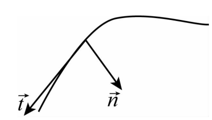


图1.2　自然坐标系

二、质点运动的描述

在明确研究对象与坐标系建立起来之后，对质点的运动进行描述时，最基本的物理量有以下几个：位矢、位移、速度、加速度。

（一）位矢和位移

1. 位矢

质点的位置可以用一个矢量来描述，设某时刻质点在P点，我们在选定的参考系上任选一固定点O，由O点向P点作一矢量$\vec{r}$。矢量$\vec{r}$的大小和方向完全确定了质点相对参考系的位置，方

位和距离都知道了，P 点的位置也就确定了，因此称 $\vec{r}$ 为位置矢量，简称位矢。相应地，质点在坐标系中的坐标 x、y、z 称为位置矢量在对应坐标轴上的分量。如图 1.3 所示，在直角坐标系中，用 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分别表示沿 x,y,z 三个坐标轴正方向的单位矢量，则位矢为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.1.1}$$

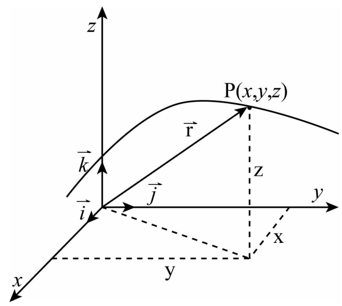


图 1.3　位置矢量

用 $|\vec{r}|$ 表示 $\vec{r}$ 的大小，则

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

令 α,β,γ 分别表示 $\vec{r}$ 与 x,y,z 三个坐标轴的夹角，则有

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{|\vec{r}|} \\ \cos\beta &= \frac{y}{|\vec{r}|} \\ \cos\gamma &= \frac{z}{|\vec{r}|} \end{aligned}\right\}$$

需说明的是：在直角坐标系中，由于存在关系 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，所以，以后说明矢量方向时，仅使用其中的两个角度即可。

2. 位移

为了描述质点在空间位置的变化，引入位移矢量。如图 1.4 所示，质点作一般曲线运动，在 t 时刻质点位于 P 点，位矢为 $\vec{r}$，在 $t+\Delta t$ 时刻运动到 P' 点，位矢为 $\vec{r}'$，显然在时间间隔 Δt 内位矢的大小和方向都发生了变化，我们用由 P 指向 P' 的矢量 $\Delta\vec{r}$ 表示 Δt 时间间隔内质点位置的变化。由图 1.4 可知 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$。时间 Δt 内质点的位移为 $\Delta\vec{r} = (x'-x)\vec{i} + (y'-y)\vec{j} + (z'-z)\vec{k}$

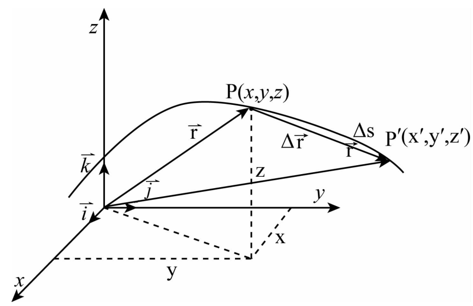


图 1.4　位移矢量

令 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 分别表示 $\Delta\vec{r}$ 沿坐标轴 x,y,z 的投影，则有

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} + \Delta z\,\vec{k} \tag{1.1.2}$$

显然　$\Delta x = x' - x, \Delta y = y' - y, \Delta z = z' - z$

位移不同于路程。位移表示的是质点始末位置的变化情况，而路程反映质点在这两个位置之间所经历的实际行程，用 Δs 表示；位移是矢量，既有大小，又有方向；路程是标量，只有大小，没有方向；位移的大小也不同于路程的大小，因而位移的大小与路程一般不等，例如质点沿圆周绕行一圈回到起点，相应的位移等于零，而路程等于圆的周长。如图 1.4 所示，位移的大小对应于图中 P、P' 两点间的线段长，而路程对应于 P、P' 两点间的弧线长，只有当 $\Delta t \to 0$ 时，方可认为二者大小相同。即使在直线运动中，位移和路程也是两个截然不同的物理量。

$\Delta\vec{r}$ 不同于 Δr，$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r$，$\Delta\vec{r}$ 表示两点间的位移，是矢量。Δr 表示位置矢量大小的改变，$\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$，它是位矢的大小在 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内的增量。

（二）速度

质点从一个位置移到另一个位置的变化可以用位移来描述，如何描述该质点从一个位置到另一个位置变化的快慢？位移 $\Delta\vec{r}$ 和产生这段位移所用的时间 Δt 之间有怎样的关系呢？

1. 平均速度

如图 1.4 所示，在选定的坐标系中，设质点在 Δt 时间内移动的位移为 $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$，显然，用 $\Delta\vec{r}$ 与 Δt 的比值可以描述质点从 p 运动到 p' 的平均变化快慢，即 $\bar{\vec{v}}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$，由于它对应的是时间间隔，而不是某一时刻或位置，所以我们称其为在 Δt 时间内的平均速度，即

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.1.3}$$

平均速度是矢量，其方向与位移 $\Delta\vec{r}$ 的方向相同。它表示在时间 Δt 内位矢 $\vec{r}(t)$ 随时间的平均变化率。

2. 瞬时速度

如何描述质点在某个位置附近的变化快慢呢？如图 1.4 所示，当质点从 p 运动到 p'，而且 p' 无限接近 P 时，质点从 p 运动到 p' 所用的时间也将趋于无穷小，因此，当 Δt 趋于零时，(1.1.3) 式的极限，即质点位矢对时间的变化率，叫做质点在时刻 t 的瞬时速度，简称速度。用 $\vec{v}$ 表示速度，根据微积分知识可知，这个极限应等于位置矢量 $\vec{r}$ 对时间的一阶导数，就有

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.4}$$

速度的方向，就是当 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\vec{r}$ 的方向，即与质点运动轨道在 P 点的切线一致。因此，质点在时刻 t 的速度方向沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而且指向运动的前方。

根据速度的定义，有 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$

即

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \tag{1.1.5}$$

用 v_x,v_y,v_z 分别表示速度 $\vec{v}$ 沿坐标轴 x,y,z 的投影，则有

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k} \tag{1.1.6}$$

有 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$v_z=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$，即速度沿直角坐标系中某一坐标轴的投影，等于质点对应该轴的坐标对时间的一阶导数。

速度的大小可表示为

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1.1.7}$$

速度的大小也叫速率，用 v 表示，即 $v=|\vec{v}|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，其中的 $\mathrm{d}s$ 表示质点的无限小路程。

（三）加速度

如何定量的描述质点从一个位置移到另一个位置速度的变化快慢？其思想同上节引入的质

点的平均速度及瞬时速度相同。质点运动时，速度也不总是恒定不变的，为了描述运动速度的变化情况，引入加速度的概念。相应地，加速度也分为平均加速度和瞬时加速度。

1. 平均加速度

如图 1.5 所示，设质点在时刻 t 的速度为 $\vec{v}(t)$，在 $t+\Delta t$ 时刻的速度为 $\vec{v}(t+\Delta t)$，则 Δt 时间内速度增量 $\Delta\vec{v}$ 与发生时间间隔 Δt 的比值称为质点在这段时间内的平均加速度。用 $\overline{\vec{a}}$ 表示，即

$$\overline{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\tag{1.1.8}$$

式中，$\Delta\vec{v}$ 是矢量，Δt 是标量，因而平均加速度 $\overline{\vec{a}}$ 是矢量，其方向与速度的变化量 $\Delta\vec{v}$ 的方向一致。

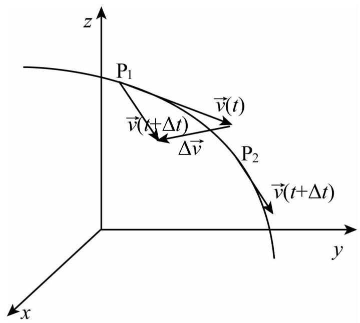


图 1.5　加速度

2. 瞬时加速度

平均加速度只能粗略地描述一段时间内质点运动速度变化快慢以及速度方向变化的情况，如果要细致地了解某一时刻质点速度变化的快慢及方向，则需要把平均加速度公式中的时间长度 Δt 尽可能地取小一些，当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度的极限值称为瞬时加速度(简称加速度)，用 $\vec{a}$ 表示，即

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\tag{1.1.9}$$

即加速度是速度对时间的一阶导数，是位置矢量对时间的二阶导数。因此只要知道了速度 $\vec{v}(t)$ 或位矢 $\vec{r}(t)$ 就可以求出加速度。

在直角坐标系中，加速度可以写为：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\tag{1.1.10}$$

式中，$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$ 分别表示加速度沿三个坐标轴的分量。

依加速度定义式，瞬时加速度的方向与 $\Delta\vec{v}$ 的极限方向相同，如图 1.5 所示。$\Delta\vec{v}$ 的方向和它的极限方向一般并不在速度 $\vec{v}$ 的方向上，因而瞬时加速度的方向一般与该时刻速度的方向并不一致。由于 $\Delta\vec{v}$ 的极限方向总是指向轨迹曲线凹侧，所以曲线运动中加速度总是指向运动轨迹凹侧。在一维运动情况下，$\vec{a}$ 与 $\vec{v}$ 的方向在同一直线上。在定义速度和加速度时，都用到了求极限的方法，求极限是人类对物质和运动作定量描述时在准确程度上的一次重大飞跃。极限概念是牛顿在 17 世纪对物体的运动作定量研究时提出的，可见微积分的创立是与对物体运动的定量研究分不开的，微积分是数学的一个重要分支，也是研究物理学不可缺少的重要工具。

综上所述，描述质点的位矢、速度、加速度三者之间的关系可以总结为质点运动学的两类问题：

微分形式：

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},\vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\tag{1.1.11}$$

即已知质点的运动方程，求某一时刻质点的位置矢量或质点的速度、加速度以及某一时刻的值，但主要是求速度和加速度。这些称为第一类问题。

积分形式： $$\vec{r}=\int\vec{v}\mathrm{d}t\ ,\vec{v}=\int\vec{a}\mathrm{d}t \tag{1.1.12}$$

即已知质点的加速度（或速度）和其初始条件（即 $t=0$ 时，质点的 $\vec{r}_0,\vec{v}_0,\vec{a}_0$），求质点的速度、运动方程，或某一时刻的速度、位置矢量，还可求轨迹方程等，但主要是求速度和运动方程，称之为第二类问题。

例 1 一只哈巴狗奔跑过一个广场，广场的上面正巧画着一套坐标系，哈巴狗的位置坐标对时间的函数由下式给出：$x=-0.31t^2+7.2t+28$，$y=0.22t^2-9.1t+30$。式中，t 的单位为 s，x 与 y 的单位为 m。分别用单位矢量表示哈巴狗在 $t=15\mathrm{s}$ 时刻的位矢、速度和加速度，并求出大小和方向。

解 (1) 位矢：$r(t)=x(t)i+y(t)j$

在 $t=15\mathrm{s}$ 时，标量分量为

$x=(-0.31)(15)^2+(7.2)(15)+28=66\mathrm{m}$

$y=(0.22)(15)^2-(9.1)(15)+30=-57\mathrm{m}$

因此，在 $t=15\mathrm{s}$ 时，有：$r=66i-57j(\mathrm{m})$

大小：$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(66)^2+(-57)^2}=87\mathrm{m}$

方向：与 x 轴夹角 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}=\arctan\dfrac{-57}{66}=-41^\circ$

(2) 速度：$v=v_xi+v_yj$

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0.31t^2+7.2t+28)=-0.62t+7.2$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0.22t^2-9.1t+30)=0.44t-9.1$$

$t=15\mathrm{s}$ 时，$v_x=-2.1\mathrm{m/s}$，$v_y=-2.5\mathrm{m/s}$，$v=-2.1i-2.5j(\mathrm{m/s})$

大小：$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(-2.1)^2+(-2.5)^2}=3.3\mathrm{m/s}$

方向：与 x 轴夹角 $\theta=\arctan\dfrac{v_y}{v_x}=\arctan\dfrac{-2.5}{-2.1}=\arctan1.19=-130^\circ$

(3) 加速度：$a=a_xi+a_yj$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0.62t+7.2)=-0.62\mathrm{m/s^2}$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0.44t-9.1)=0.44\mathrm{m/s^2}$$

加速度的表达式中不含时间 t，说明此题中的加速度不随时间变化，即它是一个恒量。

$a=-0.62i+0.44j(\mathrm{m/s^2})$

其大小：$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(-0.62)^2+(0.44)^2}=0.76\mathrm{m/s^2}$

方向：与 x 轴夹角 $\theta=\arctan\dfrac{a_y}{a_x}=\arctan\dfrac{0.44}{-0.62}=-35^\circ$

三、曲线运动

前面介绍的直线运动虽然是最基本、最简单的运动，但也是最重要的运动，因为它是进一步研究曲线运动的基础。任何实际的复杂运动都可以看成是两个或多个沿不同方向直线运动的叠加。

（一）抛体运动

当质点在地球表面附近运动时，重力加速度看成是大小和方向都不变的常量，在不考虑空气

阻力的情况下，若以任意角度抛出一个物体，则该物体会沿一抛物线运动并落回到地面，即称为抛体运动。

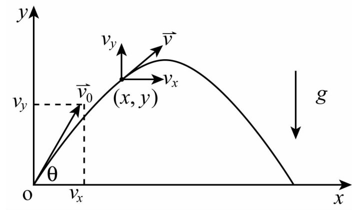


图 1.6　抛体运动

如图 1.6 所示，在物体运动过程中选取平面直角坐标系，取抛出点 o 为坐标原点，水平方向 x 轴，竖直方向 y 轴，$t=0$ 时物体速度 $\vec{v}_0$ 与 x 轴成 θ 角。这时，在水平方向，物体运动过程中不受外力作用，加速度为零；在竖直方向，物体只受重力作用，重力加速度的大小为 g，方向与 y 轴正向相反。物体在 x 方向做匀速直线运动，在 y 方向做匀加速直线运动，两个方向的速度表达式可分别写为

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_0\cos\theta,\\
v_y &= v_0\sin\theta - gt
\end{aligned}
\tag{1.1.13}
$$

于是有：

$$\vec{r} = (v_0 t\cos\theta)\vec{i} + \left(v_o t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} \tag{1.1.14}$$

可以看出，位置矢量方程是两种运动的叠加，一个是沿着 x 轴方向的匀速直线运动，一个是沿着 y 轴的匀加速直线运动，正是这两种运动的合成构成了质点的合运动，通过理想情况得出抛物线。但是在实际运动中，由于有空气阻力的存在，以此为基准，如图 1.7 所示，可以进一步研究各种不同阻力对运动的影响，运动物体受到的空气阻力和它本身的形状、大小、空气的密度以及运动速率等因素有关。

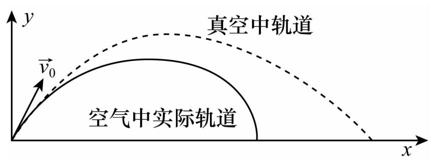


图 1.7　空气中抛体运动实际轨道

（二）圆周运动

质点的运动轨迹在某一坐标系为圆的运动，称为圆周运动。圆周运动是一种比较常见的、特殊的平面曲线运动，当物体绕固定轴转动时，其上每个点所作的都是圆周运动。对于圆周运动，我们同样把它分解为相互垂直的两个方向的运动，通过研究两个分运动进而得出圆周运动的规律。与前面研究抛体运动所不同的是：对于圆周运动，用自然坐标系描述比较方便，因此采用自然坐标系可以沿圆周轨迹的切向和法向进行分解。本节主要介绍圆周运动的速度、加速度特点，以及圆周运动的角量描述方案。

1. 圆周运动的速度

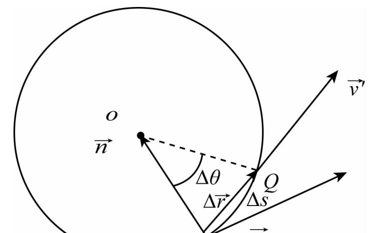


图 1.8　圆周运动

设质点做圆周运动，如图 1.8 所示，t 时刻质点在 P 点，自然坐标为 s，时刻 $t+\Delta t$ 质点在 Q 点，自然坐标为 $s+\Delta s$。Δs 是质点在时间间隔 Δt 内沿轨迹的自然坐标的增量，同一时间内质点的位移是 $\Delta\vec{r}=PQ$。根据速度的一般定义，可将质点的速度 $\vec{v}$ 表示为

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

因为在 $\Delta t\to 0$ 时，Q 点趋近于 P 点，此时 $|\Delta s|\to|\Delta\vec{r}|$，上式右边第一部分的绝对值 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right|=1$，$\Delta s\to 0$ 时，$\Delta\vec{r}$ 的方向（即 PQ 的方向）将趋近 P 点处轨迹的切线方向，若以 $\vec{\tau}$ 表

示该处切线正方向的单位矢量(指向自然坐标 s 的正向)则上式右边第一部分可与为$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}=\vec{\tau}$,应该注意,$\Delta s$ 本身也有正负,从而可得

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} \tag{1.1.15}$$

由此式可知,运动质点速度的大小由轨迹上自然坐标 s 对时间的一阶导数决定,方向沿着质点所在处轨迹的切线,指向则由$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$的正负号决定。当$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}>0$,速度方向为切线的正方向,当$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}<0$,速度指向为切线的负方向。

2. 圆周运动的加速度

圆周运动的速度方向是时时变化的,因而速度也是时时变化的。如果圆周运动的速度大小随时间变化,则称为变速率圆周运动,如图 1.8 所示,根据加速度的定义$\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$,可得

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau \tag{1.1.16}$$

其中:$\vec{a}_n=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$是法向加速度,$a_n$ 是加速度$\vec{a}$ 在法线$\vec{n}$ 方向上的投影,当 $\Delta t\to 0$ 时,P 点无限地接近 Q 点,$\vec{v}'$、$\vec{v}$ 的方向无限地靠近,此时,$\Delta\vec{v}_n$ 的极限方向将垂直于 $\vec{v}$,即 $\Delta\vec{v}_n$ 的极限方向沿圆周半径指向圆心,沿圆周半径指向圆心的方向称为轨道的法向,因而,加速度的这个分量称为法向加速度,由于 $a_n=|\vec{a}_n|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{v}_n|}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v}{r}\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v}{r}\dfrac{|\Delta s|}{\Delta t}$,也可表示为 $a_n\vec{n}$,大小等于$\dfrac{v^2}{r}$;$\vec{a}_\tau=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}$是切向加速度,它的方向为 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\vec{v}_\tau$ 的极限方向,也可以表示为 $a_\tau\vec{\tau}$,a_τ 则是加速度$\vec{a}$ 在切线$\vec{\tau}$ 方向上的投影,$a_\tau=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{v}_\tau|}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$,大小为 $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。

综合以上的讨论,质点作变速圆周运动时,加速度$\vec{a}$ 等于切向加速度$\vec{a}_\tau$ 和法向加速度$\vec{a}_n$ 的矢量和,

即
$$\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\frac{v^2}{r}\vec{n} \tag{1.1.17}$$

因此,加速度的大小为
$$|\vec{a}|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{r}\right)^2} \tag{1.1.18}$$

加速度的方向:
$$\tan\theta=a_n/a_\tau \tag{1.1.19}$$

质点作匀速圆周运动时,由于速度的大小不变,仅速度的方向改变,因而加速度只有法向加速度分量,而没有切向加速度分量;质点作变速圆周运动时,由于速度的大小和方向都变化,因而加速度既有切向分量,又有法向分量。

3. 圆周运动的角量描述

圆周运动除了可以用位移、速度、加速度这些线量描述之外,还通常用角位置、角位移、角速度、角加速度等角量来描述。如图 1.9 所示,一质点绕 O 点作半径为 r 的圆周运动,质点沿圆周运动时半径 r 为常量,任意时刻 t 质点的位置可用角坐标 θ 完全确定,这时 θ 是时间 t 的函数,可表示为

$$\theta = \theta(t) \tag{1.1.20}$$

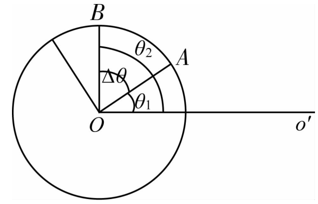


图 1.9　圆周运动的角量描述

在时刻 t，质点位于 A，角坐标为 θ；在时刻 $t+\Delta t$，质点位于 B，角坐标为 $\theta+\Delta\theta$，$\Delta\theta$ 为质点在时间 Δt 内的角位移。角位移 $\Delta\theta$ 与发生这一角位移所经历时间 Δt 的比值，称为在这段时间内质点作圆周运动的平均角速度，即

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.1.21}$$

同理，当时间 Δt 趋近于零时，$\bar{\omega}$ 将趋近于一个确定的极限值 ω 为瞬时角速度，即：

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.22}$$

设在时刻 t，质点的角速度为 ω，在时刻 $t+\Delta t$，质点的角速度为 ω'，则角速度增量 $\Delta\omega = \omega' - \omega$ 与发生这一增量所经历时间 Δt 的比值，称为在这段时间内质点的平均角加速度，即

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.1.23}$$

同理，当时间 Δt 趋近于零时，$\bar{\alpha}$ 将趋近于极限值 α 为瞬时角加速度，即：

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1.24}$$

在圆周运动中，角加速度也可以看作代数量。当质点沿圆周作加速（指速率随时间增大）运动时 ω 与 α 同号；作减速运动时 ω 与 α 异号；作匀速运动时，ω 为常量，α 等于零。当质点作匀变速圆周运动时，α 为常量；在一般情况下，α 不是常量。

4. 角量和线量的关系

在圆周运动中，线量和角量都是描述同一对象的，因而二者之间必然有着联系。如图 1.9 所示，设圆周半径为 r，则 Δt 时间内质点经过的弧长 ΔS 与角位移之间存在如下关系：$\Delta S = r\Delta\theta$，ΔS 就是作圆周运动质点在时间 Δt 内沿轨迹自然坐标的增量，因而质点的速度沿切线方向的投影 v 可以表示为

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} r \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega \tag{1.1.25}$$

按照切向加速度和法向加速度的定义，可得

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha \tag{1.1.26}$$

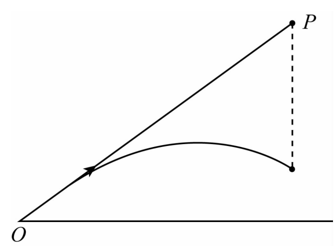
$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega v = r\omega^2 \tag{1.1.27}$$

匀变速圆周运动与匀变速直线运动中相应线量间的关系相似，即

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{1.1.28}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{1.1.29}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \tag{1.1.30}$$



例 2 图　子弹射击下落的靶体

例 2　如图所示，一支在 O 点的枪瞄准了位于 P 点的靶体射击，在击发的瞬间靶体坠落，结果子弹还是击中了下落的靶体。试证明，不管子弹的发射速度如何，子弹都会与靶体在空中相撞。

证明：分别以地面和下落的靶体作为参考系，以地面为参考系时，子弹作平抛运动；以下落的靶体为参考系时，根据相对运动，子弹作匀速直线运动。因此，只要最初子弹瞄准了位于 P 点的靶体，不管子弹的发射速度如何，子弹都会与靶体在空中相撞。

四、相对运动

物体的运动是绝对的，但对于运动的描述却是相对的，在不同的参考系中描述同一个运动，所得结论往往是不同的。相对运动问题常常涉及到两个参考系，一个是相对于观察者静止的参考系，称为静止参考系（简称静系，也称 S 系）；另一个是相对于观察者运动的参考系，称为运动参考系（简称动系，也称 S' 系）。运动参考系相对于静止参考系的运动可以是平动，也可以是转动，或者是更复杂的运动。这里仅讨论最简单的情况：动系（S' 系）相对于静系（S 系）作匀速直线运动。如图 1.10 所示，在 S 系和 S' 系中分别建立直角坐标系 xoy 和 $x'o'y'$，使两坐标系中各对应坐标轴保持平行。设空间有一运动质点，t 时刻质点位于 P 点，该点在 S 系中对应的位矢为 $\vec{r}$，在 S' 系对应的位矢为 $\vec{r}\,'$，由图 1.10 可知，两参考系中位矢之间的关系为

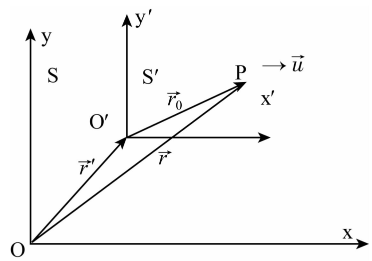


图 1.10　相对运动

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \tag{1.1.31}$$

以 Δt 除此式，并令 $\Delta t \to 0$，可以得到相应的速度之间的关系，即

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' \tag{1.1.32}$$

其中以 $\vec{v}$ 表示质点相对于参考系 xoy 的速度，即物体相对于静系的速度称为绝对速度；以 $\vec{v}'$ 表示同一质点相对于参考系 $x'o'y'$ 的速度，即物体相对于动系的速度称为相对速度；以 $\vec{u}$ 表示参考系 $x'o'y'$ 相对于参考系 xoy 平动的速度，即动系相对于静系的速度称为牵连速度。同一质点相对于两个相对做平动的参考系的速度之间的这一关系叫做伽利略速度变换。

如果质点运动速度是随时间变化的，则求（1.1.32）式对 t 的导数，就可得到相应的加速度之间的关系。以 $\vec{a}$ 表示质点相对于参考系 xoy 的加速度，以 $\vec{a}'$ 表示质点相对于参考系 $x'o'y'$ 的加速度，以 $\vec{a}_0$ 表示参考系 $x'o'y'$ 相对于参考系 xoy 平动的加速度，则由（1.1.32）式可得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 \tag{1.1.33}$$

这就是同一质点相对于两个相对做平动的参考系的加速度之间的关系。如果两个参考系相对于做匀速直线运动，即 $\vec{u}$ 为常量，则有 $\vec{a} = \vec{a}'$，这就是说，在相对做匀速直线运动的参考系中观察同一质点的运动时，所测得的加速度是相同的。（1.1.31）、（1.1.32）、（1.1.33）称为伽利略变换式，它们是经典力学中的一个重要结论。

§1—2　质点动力学

质点动力学的任务是解释质点的运动，即研究质点受力与质点运动状态变化之间的关系。牛顿在伽利略、笛卡尔等人研究的基础上，于 1687 年发表的《自然哲学之数学原理》一书中，发表了三条运动定律，这三条运动定律构成了质点运动学的基础，也开始了牛顿力学时代。本节主

要介绍动力学的基本定律——牛顿运动三定律及其相关的概念，然后介绍利用它们分析解决问题的方法。

一、国际单位制与量纲

国际单位制与量纲是物理学很重要的概念，因此，有必要给予介绍。

（一）国际单位制

应用牛顿定律进行数量计算时，各物理量的单位必须“配套”。相互配套的一组单位称为“单位制”。目前国内外通用的单位制叫国际单位制，代号为 *SI*。在确定各物理量的单位时，总是根据它们之间的相互联系选定少数几个物理量作为基本量，并人为地规定它们的单位，这样的单位叫基本单位。其他的物理量都可以根据一定的关系从基本量导出，这些物理量叫导出量。导出量的单位都是基本单位的组合，叫导出单位。由于基本单位的选择不同，就组成了不同的单位制。*SI* 的力学基本单位是秒(s)、米(m)和千克(kg)。“秒”是 *SI* 时间单位，将铯的一种同位素(*Cs*)原子发出的一个特征频率光波周期的 9192631770 倍定义为 1 秒；“米”是 *SI* 长度单位，规定光在真空中在 1/299792458 秒内所经过的距离为 1 米；“千克”是 *SI* 的质量单位，规定保存在巴黎度量衡局的地窖中“千克标准原器”的质量是 1 千克。

有了基本单位，就可以由它们构成导出量的单位，所以，非基本量可以根据定义或借助方程用基本物理量来表示，这些非基本量称为导出量，其单位称为导出单位。例如根据速度的定义 $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$，可导出它的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 等等。

（二）量纲

以 T、L 和 M 分别表示基本量的时间、长度和质量。如果单考虑某一导出量是如何由这些基本量组成的，则一个导出量可以用 T、L 和 M 的幂次的组合表示出来。例如速度、加速度、力等量可以这样来表示：

$$[v]=LT^{-1},[a]=LT^{-2},[F]=MLT^{-2}$$

这样的表示式(或其中的幂次)叫做该物理量的量纲。应该指出的是，这些量纲的表示式是它们的 *SI* 表示式。对于不同的单位制，如果基本量的选择不同，则同一物理量的量纲也不同。量纲的概念在物理学中很重要。它可以定性表示出物理量与基本量之间的关系，可以有效地应用它进行单位换算，可以用它来检验物理公式的正确与否，还可以通过它来推知某些物理规律。在做题时对于每一个结果都应该这样检查一下量纲，以免出现原则性的错误。当然，只是量纲正确，并不能保证结果就一定正确，因为还可能出现数字系数的错误。

二、牛顿运动定律

力是改变物体运动状态的原因，力与物体状态变化之间的关系可以通过牛顿定律加以反映。本节主要介绍牛顿三大定律的内容，以及应用牛顿定律求解问题的基本思路和步骤。

（一）牛顿第一定律

牛顿第一定律可以陈述为：任何物体都将保持静止或匀速直线运动状态，直到作用在它上面的力迫使它改变这种状态为止。牛顿第一定律表明，任何物体都具有保持其运动状态不变的性质，这个性质叫做惯性，所以牛顿第一定律又称作惯性定律。第一定律指出，力是改变物体运动状态的原因。力是物体间的相互作用，是使物体产生加速度的原因，而不是使物体运动的原因。

牛顿第一定律是牛顿从大量的实验中总结出来的，不能简单地直接用实验加以验证，我们

确信牛顿第一定律的正确性，是因为从它所导出的其他结果都和实验事实相符合。从长期实践和实验中总结归纳出一些基本规律性，虽不能用实验等方法直接验证其正确性，但以它们为基础导出的定理都与实验和实践相符合，所以人们公认这些基本规律是正确的，并以此为基础研究其他有关问题，甚至建立新的学科。

第一定律定义了一类特殊的参考系 —— 惯性系。依据第一定律可知，当物体不受外力作用时将保持原来的运动状态 —— 静止或匀速直线运动，相应地，牛顿定律适用的参考系称为惯性系。严格的惯性系是没有的，地球是最常用的惯性系，但精确的观察表明，地球不是严格的惯性系，因为地球既有绕太阳的公转，又有自转现象。于是人们又想到选太阳作惯性系，但太阳也有转动现象，也不是严格的惯性系。不过，对于大多数地球上物体的运动问题，如果精度要求不是很高，地球可以作为近似的惯性系。而对于太阳系内物体的运动，太阳则可作为近似的惯性系。如果选定了惯性系，则相对于惯性系静止或匀速直线运动的参考系也都是惯性系，而相对于惯性系作加速运动的参考系则是非惯性系。

（二）牛顿第二定律

为了学习牛顿第二定律，首先要引入动量这个物理量，物体在运动时总具有速度，我们把物体的质量 m 与其运动速度 $\vec{v}$ 的乘积叫做物体的动量，用 $\vec{P}$ 表示，即 $\vec{P}=m\vec{v}$，牛顿第二定律可以表述为：一个物体的动量随时间的变化率正比于这个物体所受的合力，其方向与所受的合力方向相同。其数学表达式为

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.1}$$

当物体在低速情况下运动时，即物体的运动速度远小于光速时，物体的质量可以视为是不依赖于速度的常量。于是上式可写成

$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a} \tag{1.2.2}$$

这就是大家熟悉的牛顿第二定律的表示形式，它表明质点受力作用时，在某时刻的加速度，其大小与质点在该时刻所受合力的大小成正比，与质点的质量成反比；加速度的方向与合力的方向相同。应当指出，若运动物体的速度接近于光速时，物体的质量就依赖于其速度了，式(1.2.2)也可写成 $\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$，即

$$\vec{F}=ma_x\vec{i}+ma_y\vec{j}+ma_z\vec{k} \tag{1.2.3}$$

对于牛顿第二定律的理解需要注意以下几点：

(1) 牛顿第二定律所表示的合外力与加速度之间的关系是瞬时关系。也就是说，加速度只在外力有作用时才产生，外力改变了，加速度也随之改变。

(2) 牛顿第二定律是带有方向的矢量式，符合力的叠加原理，在直角坐标系 Ox，Oy 和 Oz 轴上的分量式分别为 $F_x=ma_x$，$F_y=ma_y$，$F_z=ma_z$，式中 F_x、F_y 和 F_z 分别表示作用在物体上所有的外力在 Ox，Oy 和 Oz 轴上的分量之和($F_x=\sum\limits_{i=1}^{n}F_{ix}$，$F_y=\sum\limits_{i=1}^{n}F_{iy}$，$F_z=\sum\limits_{i=1}^{n}F_{iz}$)；$a_x$、$a_y$ 和 a_z 分别表示物体加速度 $\vec{a}$ 在 Ox，Oy 和 Oz 轴上的分量；在自然坐标系中牛顿第二定律可以写成 $\vec{F}=m\vec{a}=m(\vec{a}_\tau+\vec{a}_n)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+m\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$，如以 $\vec{F}_\tau$ 和 $\vec{F}_n$ 代表切向力和法向力，则有

$$\begin{cases}\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}\\ \vec{F}_n = m\vec{a}_n = m\dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}\end{cases}。$$

（三）牛顿第三定律

牛顿第三定律可以表述为：两个物体之间的作用力$\vec{F}$和反作用力$\vec{F}'$，沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物体上，这就是牛顿第三定律，其数学表达式为

$$\vec{F} = -\vec{F}' \tag{1.2.4}$$

如果把物体A作用于物体B的力称为作用力，那么物体B作用于物体A的力就称为反作用力，或者反过来把后者称为作用力，前者称为反作用力亦可。值得注意的是，作用力与反作用力总是同时成对出现，同时消失，彼此相互作用，而且属于同种类型；同时是以力的传递不需要时间即传递速度无限大为前提的，如果力的传递速度有限，作用力与反作用力就不一定相等了，例如，电磁力以光速传递，但在较强电磁力作用下，粒子的运动速度可达到很大，与光速可比拟，此时作用力与反作用力就不一定相等了。在通常的力学问题中，物体运动速度往往不大，所以牛顿第三定律总是适用的。

（四）牛顿运动定律应用

动力学问题一般有两类，一类是已知力的作用情况求运动；另一类是已知运动情况求力。

应用牛顿运动定律可以对物体的受力情况进行分析，并给出力和运动在数学上的定量关系，从而来研究物体运动的特性。解题的基本思路概括如下：

（1）确定研究对象并进行受力分析，其中包括对物体进行隔离，并画受力图；

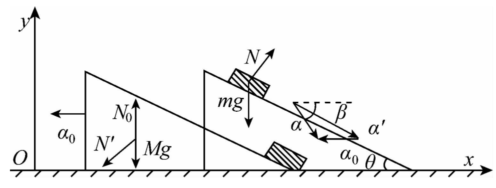
（2）根据研究对象建立合适的坐标系；

（3）用牛顿运动定律的分量式列方程；

（4）利用其他的约束条件列补充方程；

（5）先用文字符号求解，然后带入数据计算结果。

例3　如图所示，在光滑的水平地面上放一质量为M的楔块，楔块底角为θ，斜边光滑。今在其斜边上放一质量为m的物块，求物块沿楔块下滑时对楔块和对地面的加速度。



例3图

解　分别以楔块和物体为研究对象，它们受力情况如图所示，其中N和N'为二者之间的相互作用。由于水平地面光滑，在物块下滑过程中，楔块会向后退。以$\vec{a}$表示物块对地面的加速度，它的方向与水平面成β角向下。以$\vec{a}_0$表示楔块的加速度，它的方向水平向后。物体相对于楔块的加速度为$\vec{a}'$。根据运动的相对性，有

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

在地面参考系中选如图所示的坐标系，则有

$$a_x = a'_x - a_0 = a'\cos\theta - a_0$$
$$a_y = a'_y = -a'\sin\theta$$

对滑块应用牛顿第二定律，就有

$$x\text{ 向：} N\sin\theta = ma_x$$

$$y\text{ 向}:N\cos\theta - mg = ma_y$$

利用上面的关系式,可得

$$N\sin\theta = ma'\cos\theta - ma_0$$
$$N\cos\theta - mg = -ma'\sin\theta$$

对楔块应用牛顿第二定律,注意到 $N' = N$,就有 x 向:$N\sin\theta = Ma_0$

联立可解得

$$a' = \frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g,\ a_0 = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

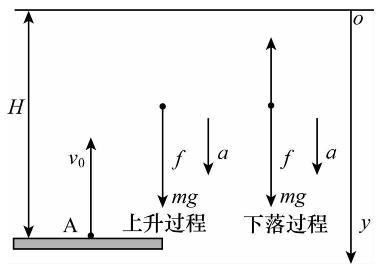
由此得

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{\sin\theta\sqrt{M^2 + m(2M+m)\sin^2\theta}}{M+m\sin^2\theta}g$$

方向角 β 由下式给出:

$$\tan\beta = \left|\frac{a_y}{a_x}\right| = \left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\theta$$

例 4 在出发点 A 以速度 v_0 竖直向上抛出一质量为 m 的小球。小球运动时,除受重力外还受一大小为 $f = kmv^2$ 的粘滞阻力,k 为常数,v 为小球的速率。求:(1) 小球能上升的最大高度;(2) 当小球上升到最高点,然后又回到出发点时的速率。



例 4 图

解 (1) 以最高点为坐标原点,竖直向下为 y 轴建立直角坐标系,小球上升和下落过程中的受力分析如例 4 图所示。根据牛顿第二定律,有

$$mg + kmv^2 = ma = m\frac{dv}{dt}$$

因为
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

所以
$$g + kv^2 = v\frac{dv}{dy}$$

将相同的变量整理到等号的一端,然后两端积分,得

$$\int_{-v_0}^{0}\frac{v\,dv}{g+kv^2} = \int_H^0 dy$$

所以
$$H = \frac{1}{2k}\ln\frac{g+kv_0^2}{g}$$

(2) 下落过程中,根据牛顿第二定律,有

$$mg - kmv^2 = ma = m\frac{dv}{dt} \quad \text{而} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$\int_0^v\frac{v\,dv}{g-kv^2} = \int_0^H dy \quad \therefore H = \frac{1}{2k}\ln\frac{g}{g-kv^2}$$

由:$H = \dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{g}{g-kv^2} = \dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{g+kv_0^2}{g}$

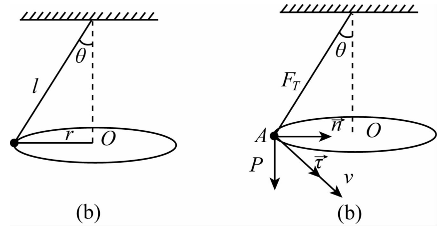
得:$v = \sqrt{\dfrac{gv_0^2}{g+kv_0^2}}$

例 5 如图所示(圆锥摆),长为 l 的细绳一端固定在天花板上,另一端悬挂质量为 m 的小球,小球经推动后,在水平面内绕通过圆心 O 的铅直轴作角速率为 ω 得匀速率圆周运动。问绳和

铅直方向所成的角度为多少?空气阻力不计。

解　小球受重力$\vec{P}$和绳的拉力$\vec{F}_T$作用,其运动方程为$\vec{F}_T+\vec{P}=m\vec{a}$,式中$\vec{a}$为小球的加速度。

由于小球在水平面内作线速率为$v=r\omega$的匀速率圆周运动,过圆周上任意点A,取自然坐标系,其轴线方向的单位矢量分别为$\vec{n}$和$\vec{\tau}$,小球的法向加速度的大小为$a_n=v^2/r$,而切向加速度$a_\tau=0$,且小球在任意位置得速度$\vec{v}$的方向均与$\vec{P}$和$\vec{F}_T$所成的平面垂直。因此,按如图所选的坐标系,上式的分量式为$F_T\sin\theta=ma_n=m\dfrac{v^2}{r}=mr\omega^2$和$F_T\cos\theta-P=0$



例 5 图

由图知$r=l\sin\theta$,故由上两式,得$F_T=m\omega^2 l$及$\cos\theta=\dfrac{mg}{m\omega^2 l}=\dfrac{g}{\omega^2 l}$

得到$\theta=\arccos\dfrac{g}{\omega^2 l}$,可见,当$\omega$越大时,绳与铅直方向所成的夹角$\theta$也越大。

三、动量定理和动量守恒定律

(一)动量定理

1.质点动量定理

由前面的学习可知,物体在外力作用下将产生加速度。如果力持续作用一段时间,则根据速度和加速度的关系可知,物体的速度必然随之变化,但在极短的时间间隔内,可认为其不变,dt表示极短的时间,$\vec{F}$表示这一极短的时间段内质点所受的力,该力所产生的积累效果可表示为

$$\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\mathrm{d}t \tag{1.3.1}$$

d$\vec{I}$称为力$\vec{F}$在时间dt内的元冲量。则变力$\vec{F}$在时间间隔$\Delta t=t_2-t_1$内的积累效果可表示为

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t \tag{1.3.2}$$

$\vec{I}$称为力$\vec{F}$在时间Δt内的冲量,冲量是过程量,它描述了力在这段时间内的积累效果。在国际单位制中,冲量的单位是牛·秒(N·s)

根据牛顿第二定律$\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$可得

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p} \tag{1.3.3}$$

当考虑力持续了一段有限时间从t_1时刻到t_2时刻的作用效果时,还可以对(1.3.3)式积分,并得到

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1 \tag{1.3.4}$$

上式中$\vec{I}$是合力$\vec{F}$在t_1到t_2这段时间内的总冲量,$\vec{I}$的方向为动量增量的方向,$\vec{p}_2$为质点在t_2时刻的动量(末动量),$\vec{p}_1$为质点在t_1时刻的动量(初动量)。则式(1.3.4)所反映的内容可叙述为:物体所受合外力的冲量等于物体动量的增量(即物体末动量与初动量的矢量差),这称为质点的动量定理。

动量定理是从牛顿第二定律推导得来的,它同样反映了力与质点运动状态变化之间的关

系。力在物体上作用一段时间，力的冲量改变了物体的动量，因而可以说，动量定理反映了力在时间上的累积作用效果。动量定理表明，物体动量的改变是由合外力和作用时间这两个因素决定的。一方面，力越大，作用时间越长，物体动量的变化越大；另一方面，如果物体动量的改变相同，那么，力作用的时间越短，力将越大，力作用的时间越长，力将越小。

在碰撞打击、散射等类问题中，常用到平均冲力的概念。如果一个恒力 $\overline{\vec{F}}$ 在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 产生的冲量与变力 $\vec{F}$ 在相同的时间内产生的冲量相同，则有：

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = \overline{\vec{F}}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

其 $\overline{\vec{F}}$ 为变力 $\vec{F}$ 在时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内的平均冲力，

$$\overline{\vec{F}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}t = \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{t_2 - t_1} \tag{1.3.5}$$

其直角坐标系的分量式为

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = \overline{F}_x \Delta t = p_{2x} - p_{1x} \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = \overline{F}_y \Delta t = p_{2y} - p_{1y} \\ I_z &= \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = \overline{F}_z \Delta t = p_{2z} - p_{1z} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.6}$$

2. 质点系的动量定理

由几个有相互作用的物体组成的总体或物体组称为系统，如果组成系统的物体都可以视为质点，则称系统为质点系。我们将在质点动量定理的基础上，推导质点系动量定理，并进一步研究动量守恒定律及其应用。在一个质点系中，我们把各质点受到的系统外的物体对它们的作用力称为外力，质点系中各质点彼此之间的相互作用力称为内力。

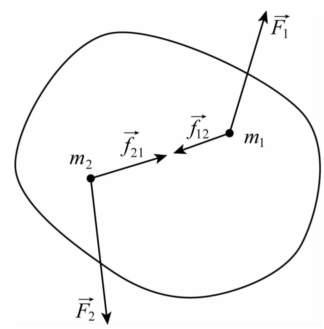


图 1.11　质点系的动量定理

设质点系由 N 个质点组成，先取系统中的两个质点。如图(1.11)所示两个质点的质量是 m_1 和 m_2，它们受到的外力分别为 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$，内力分别为 $\vec{f}_{12}$ 和 $\vec{f}_{21}$，首先对两质点分别应用质点的动量定理，有：$(\vec{F}_1 + \vec{f}_{12})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}_1$；$(\vec{F}_2 + \vec{f}_{21})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}_2$；

将其求和，可得：

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\mathrm{d}t + (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}_1 + \mathrm{d}\vec{P}_2$$

其中 $\vec{f}_{12}$ 和 $\vec{f}_{21}$ 是两质点之间的内力，是一对作用力和反作用力，因此 $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$

所以上式写为$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}_1 + \mathrm{d}\vec{P}_2$，将此结论推广到由两个以上的质点组成的质点系，有

$$(\sum_i \vec{f}_i)\mathrm{d}t + (\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\sum_i \vec{P}_i)$$

由于内力总是以作用力和反作用力的形式成对出现，所以 $\sum_i \vec{f}_i = 0$，因此上式可变为：

$$(\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\sum_i \vec{P}_i) \tag{1.3.7}$$

即
$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P} \tag{1.3.8}$$

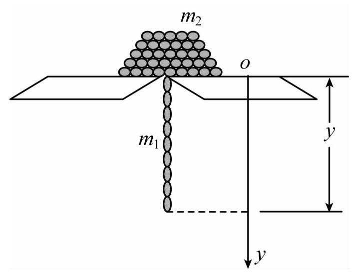
当力持续作用一段时间后质点系动量变化的规律时，对(1.3.8)式积分可得：

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \tag{1.3.9}$$

式中 $\vec{I}$ 是 Δt 时间内质点系受到的合外力的冲量，$\vec{p}_2$ 和 $\vec{p}_1$ 是质点系初态和末态时的动量。

上式是质点系动量定理的积分形式，表明在某段时间内，质点系受到的合外力的冲量等于质点系(总)动量的增量，这就是质点系的动量定理。这个定理的重要意义在于，只有外力才能改变系统的动量，而内力只能改变每个质点的动量，不能改变整个系统的动量。

例 6　一柔软链条长 l，单位长度的质量为 λ，链条放在桌上，桌上有一小孔，链条一端由小孔稍伸下，其余部分堆在小孔周围。由于某种扰动，链条因自身重量开始落下。设链条与各处的摩擦均略去不计，且认为链条软得可以自由伸开，求链条下落速度与落下距离之间的关系。



例 6 图

解　以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统，建立如图所示的坐标系。设某一时刻 t 有长度为 y、质量为 m_1 的链条已从孔下落，则链条所受的外力为

$$F = m_1 g = \lambda y g$$

由质点系动量定理得

$$F\mathrm{d}t = \mathrm{d}p$$

而动量为　$$\mathrm{d}p = \lambda \mathrm{d}(yv)$$

所以　$$\lambda y g\,\mathrm{d}t = \lambda \mathrm{d}(yv)$$

$$yg = \frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$$

两边同乘以 $y\mathrm{d}y$，得

$$y^2 g\mathrm{d}y = y\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t} = yv\mathrm{d}(yv)$$

两端同时积分

$$g\int_0^y y^2\mathrm{d}y = \int_0^{yv} yv\mathrm{d}(yv)$$

解得　$\frac{1}{3}gy^3 = \frac{1}{2}(yv)^2$，即　$v = \sqrt{\frac{2}{3}gy}$

(二) 动量守恒定律

由质点系的动量定理可知，如果质点系所受的合外力(或合外力的冲量)为零，即 $\vec{F} = 0$，质点系的动量将保持不变，即有：

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{恒量}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.3.10}$$

这个规律就是动量守恒定律，表明如果作用在质点系上的合外力为零，则该系统的动量保持不变。当 $\sum_i F_{ix} = 0$ 时，在直角坐标系中的分量式为：

$$\sum_i m_i v_{ix} = \sum_i m_i v_{iox} \tag{1.3.11}$$

在应用动量守恒定律时，应注意以下几点：

(1) 在质点系所受的合外力为零时,系统的动量守恒。动量守恒并不意味着系统内各质点的动量保持不变,在系统内部各质点间可以发生动量的转移。

(2) 动量守恒的条件是系统所受合外力的矢量和为零,即系统内各物体不受外力或各物体所受外力的矢量和为零。不过在处理具体问题时,这个条件往往得不到严格的满足,例如在爆炸、碰撞、冲击等过程中,合外力不一定为零,但由于内力往往比外力大得多,这时认为这个过程动量近似守恒。

(3) 若系统所受的合外力不等于零,但所受的合外力在某方向上的分量为零时,系统的总动量虽然不守恒,但总动量在该方向上的分量守恒。

(4) 动量守恒定律是物理学中最基本的规律之一。动量守恒定律适用的质点系范围,大到宇宙,小到微观粒子,当把质点系的范围扩展到整个宇宙时,可以得出宇宙中动量的总量是一个不变量的结论,这就使得动量守恒定律成为自然界普遍遵从的定律。

最后需要指出,在所有的惯性系中,动量守恒定律都成立,但在应用该定律时应注意,各质点的动量都应是相对同一参考系而言。

(三) 火箭的飞行原理

火箭的飞行原理是动量守恒定律的最重要的应用之一。我国是发明火箭最早的国家,随着火药的出现,约在公元9、10世纪,我国就开始把火药用到军事上。公元1232年,已在战争中使用了真正的火箭。现在我国的空间技术已经进入到世界先进行列。

火箭在飞行时,它在背着飞行的方向上不断地喷出大量速度很大的气体,使火箭在飞行方向上获得很大的动量,从而获得巨大的前进速度。因为这一切并不依赖于空气的作用,所以它可在空气稀薄的高空或宇宙空间飞行。我国载人航天飞船神舟五号、神舟六号都是以"长征二号 F 火箭"作为发射动力的。

设某火箭(可看作质点系)由火箭体和其中尚存的燃料两部分组成,空气的阻力和重力的影响都可以忽略不计,如图 1.12 所示,t 时刻火箭体的质量为 m,取火箭运行方向为正方向,速度为 $\vec{v}$。到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻,火箭喷出了质量为 $|\mathrm{d}m|$ 的气体(这里,$\mathrm{d}m$ 是质量 m 在 $|\mathrm{d}t|$ 时间内的增量,由于质量 m 是随 t 的增加而减小,所以 $\mathrm{d}m$ 本身为负值),喷出的气体相对于火箭的速度为 $\vec{u}$,使火箭的速度增加了 $\mathrm{d}\vec{v}$,火箭体质量变为 $m+\mathrm{d}m$,速度变为 $\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$。

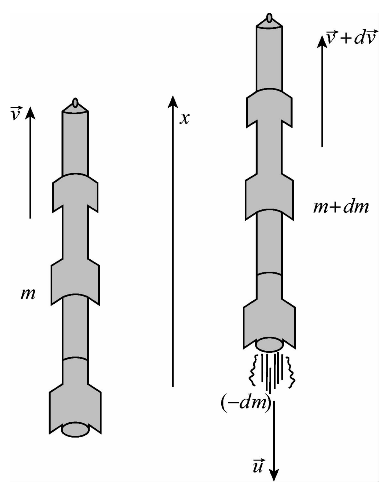


图 1.12 火箭的飞行原理

根据动量定理有

$$\vec{F}\mathrm{d}t=(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-(m\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{u})$$

即 $\vec{F}\mathrm{d}t=m\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{v}+m\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\mathrm{d}\vec{v}-m\vec{v}-\mathrm{d}m\vec{u}$

略去二阶无穷小量 $\mathrm{d}m\mathrm{d}\vec{v}$ 后,则上式可写为 $\vec{F}\mathrm{d}t=m\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{v}-\mathrm{d}m\vec{u}$

整理上式得

$$\vec{F}\mathrm{d}t=m\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m(\vec{v}-\vec{u})$$

令 $\vec{v}_r=\vec{v}-\vec{u}$,代入上式可得:

$$\vec{F}\mathrm{d}t=m\mathrm{d}\vec{v}+\vec{v}_r\mathrm{d}m$$

等式两边同除以 $\mathrm{d}t$ 得

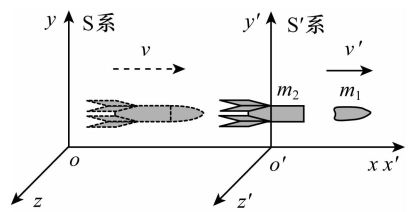
$$\vec{F}-\vec{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.12}$$

这就是变质量动力学的基本方程，也称密歇尔斯基方程，是俄国学者密歇尔斯基(1859－1935)于1897年得到的。在火箭飞行过程中，如果要求加速，则应当沿飞行的反方向喷射废气，此时$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}<0$，$\vec{v}_r$沿火箭飞行的反方向，于是火箭可获得一项附加的推力$\vec{F}_r=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}_r$；如果希望火箭减速，则应向前喷气，此时就可获得一项相应的减速力$\vec{F}_r=-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}_r$，表明火箭发动机的推力与燃料燃烧速率$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$以及喷出气体的相对速度$\vec{v}_r$成正比。设火箭在自由空间飞行时喷射气体相对火箭的速度$\vec{v}_r$恒定不变，则有$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$，$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\vec{v}_r\int_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m}$；$\vec{v}-\vec{v}_0=\vec{v}_r\ln\frac{m}{m_0}=-\vec{v}_r\ln\frac{m_0}{m}$，气体相对火箭的速度$\vec{v}_r$与火箭的速度$\vec{v}$方向相反，若取$\vec{v}$的方向为正方向，上式可写为

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}_r\ln\frac{m_0}{m} \tag{1.3.13}$$

上式中m_0/m叫做质量比，在同样的条件下，如果火箭的喷气速度越大，火箭所能达到的速度也就越大；如果火箭的质量比越大，火箭所能达到的速度也就越大。因此，要提高火箭的速度，可采用提高喷气速度和质量比的办法。但这两种办法目前在技术上都有困难，所以，一般都采用多级火箭来达到提高速度的目的。多级火箭是由几个火箭连接而成的系统，火箭起飞时，第一级火箭的发动机开始工作，推动系统前进。当第一级的燃料烧尽后，第二级火箭的发动机开始工作，并自动脱落第一级火箭的外壳，以增加质量比，因此第二级火箭在第一级火箭的基础上进一步加速，同理，当第三级外壳脱落，火箭也就达到了入轨速率。

例7　一枚返回式火箭以$2.5\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的速率相对地面沿水平方向飞行，如图所示，设空气阻力不计。先由控制系统使火箭分离为两部分，前方部分是质量100kg的仪器舱，后方部分是质量200kg的火箭容器。若仪器舱相对火箭容器的水平速率为$1.0\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求仪器舱和火箭容器相对地面的速度。



例7图

解　设地面为S系，火箭容器为S'系，仪器舱的质量为m_1，火箭容器的质量为m_2，仪器舱和火箭容器相对地面的速度分别v_1、v_2，仪器舱相对火箭容器的水平速率v'，由伽利略变换，有

$$v_1=v_2+v'$$

因为控制系统使火箭分离时，系统所受的合外力为零，系统的动量守恒

$$(m_1+m_2)v=m_1v_1+m_2v_2$$

解得$v_2=v-\frac{m_1}{m_1+m_2}v'$，即$v_2=2.17\times10^3\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$v_1=3.17\times10^3\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

(四) 质心和质心运动定理

在研究多个物体组成的质点系的运动时，我们有时要引入质心的概念。

1. 质心

任何物体都由大量的原子所组成，将其看成由大量微小的粒子组成，即质点组成，所谓质心

就是质点系的质量中心。在质点间存在着各种力，用 i 来表示某一质点的标记，如图 1.13 所示，则作用在第 i 个质点上的力为这个质点的质量乘以这个质点的加速度 $\vec{F}_i = m_i \dfrac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}$ 式中：m_i 为第 i 个质点的质量，$\vec{r}_i$ 为第 i 个质点的位矢。低速情况下，物体的质量为常数，因此 $\vec{F}_i = \dfrac{\mathrm{d}^2(m_i\vec{r}_i)}{\mathrm{d}t^2}$ 将作用在所有质点上的力加起来，得到总的力为

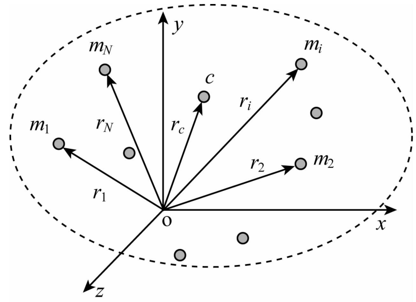


图 1.13　质心

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} = \frac{\mathrm{d}^2\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)}{\mathrm{d}t^2}$$

因此，总的力为各个质量与位矢的乘积之和的二阶导数。

用 M 代表所有质量的总和，即总质量，并定义一个矢量 $\vec{r}_c = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$ （1.3.14）

则 $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}^2(M\vec{r}_c)}{\mathrm{d}t^2} = M\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_c}{\mathrm{d}t^2}$

由此得出，质心的运动情况就好像所有的质量都集中在这点，而且所有的外力也都作用在该点。在直角坐标系的分量式为

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\int x\mathrm{d}m}{M} \\ y_C &= \frac{\int y\mathrm{d}m}{M} \\ z_C &= \frac{\int z\mathrm{d}m}{M} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.15}$$

虽然质心的位矢随坐标系的选取而变化，但对一个质点系，质心的位置是固定的。

2. 质心运动定理

将式(1.3.14)对时间求导，可得质心的速度 $\vec{v}_C = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sum_i m_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{M}$，其中 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_i$，所以上式变为

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} \tag{1.3.16}$$

对(1.3.16)式求导，可求得质心的加速度为 $\vec{a}_C = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sum_i m_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}}{M} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$，其中 $\vec{a}_i = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}$，所以上式变为

$$\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M} \tag{1.3.17}$$

由式(1.3.16)可得

$$M\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{P}_i \tag{1.3.18}$$

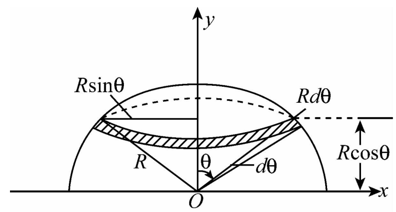
上式中 M 为质点系的总质量，$\sum_i m_i \vec{v}_i$ 为质点系的总动量这表明质点系内质点的动量的矢量和等于质心的速度乘以系统所有质点的质量。而由式(1.3.17)可得

$$M\vec{a}_C = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i \tag{1.3.19}$$

其中 $\sum_i \vec{F}_i$ 为系统所受的合外力。式(1.3.19)称为**质心运动定律**，它表明质点系所受外力的矢量和等于质点系总质量与质心加速度的乘积。

在无外力时，总动量是常数，因此，质心的速度为常量，即 $\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}$ 为常量。这是质心的一个重要性质，例如，一个在飞行中衰变的放射性核，或一个在无外力作用的空间爆炸为碎片的子弹，就具有这种特性。虽然由一个整体变成了多个部分，但其质心的速度是不变的。

例 8　求质量分布均匀的质量为 m 半径为 R 的半薄球壳的质心。



例 8 图

解　首先建立如图所示的坐标系，由于半球壳对 y 轴对称，可以断定质心一定位于 y 轴上，所以 $x_C = 0$，在半球壳上取一质元，为一圆环，圆环的面积为 $\mathrm{d}s = 2\pi R\sin\theta R\,\mathrm{d}\theta$，设该球壳的质量面密度为 σ，则该圆环的质量为 $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$，积分可得

$$y_C = \frac{\int y \mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sigma 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta}{\sigma 2\pi R^2}$$

由图可知 $y = R\cos\theta$，所以 $y_C = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}R$

四、动能定理和质点系功能原理

（一）动能定理

前面所介绍的动量定理是从力在时间上累积的角度研究力作用的效果。本节将从力在空间累积作用的角度，研究力与质点运动状态变化的关系。首先，介绍两个物理量，即力的功和物体的动能，然后，在此基础上讨论动能定理的内容及应用。

1. 功和功率

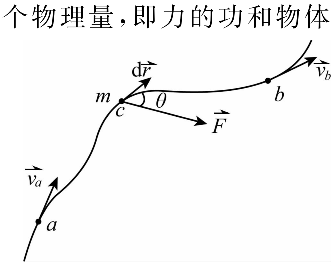


图 1.14　变力的功

变力对曲线运动物体所做的功，如图 1.14 所示，设一质点在变力 $\vec{F}$ 的作用下，沿曲线从 a 点运动到 b 点，为计算力 $\vec{F}$ 在此段上的功，可以按以下步骤进行：首先，把物体所经历的这段路程分割成许多个无限小段。对于任一小段，由于其无限小，因而可以认为物体在其上的路径为

直线，则对应的路径可取为位移元 $\mathrm{d}\vec{r}$，在此过程中.可以把质点运动的轨道分成许多无限小的有向线段，由于各线段分割非常小，都可以看成直线段，而且在小线段上的力也可近似看成恒力。力 $\vec{F}$ 在任一有向线段 $\mathrm{d}\vec{r}$(称为元位移) 上所做的功称为元功，即

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{1.3.20}$$

最后，计算整段路径上力的功，在质点由位置 a 沿路径 L 到达位置 b 的整个路径中，力 $\vec{F}$ 所做的功应当是各小段位移上的功的和，可表示为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{1.3.21}$$

若质点同时受到几个力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots \vec{F}_n$ 的作用，且在这些力作用下由 a 点沿任意曲线运动到 b 点。用 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别代表 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots \vec{F}_n$ 在这一过程中对质点所做的功。由于功是代数量，故在这一过程中，这些力对质点所作的总功应等于这些力分别对质点所做功的代数和，即

$$A = A_1 + A_2 + \cdots A_n \tag{1.3.22}$$

因为功和位移相联，因此功的大小与参照系有关。功的单位为焦耳，符号表示为 J，并且 1J = 1N · m。可见，求合力的功有两种方法：一是先求出合力，再求合力的功；二是先求各分力的功，然后再求各功的代数和，从而得出合力的功。

在实际工作中，不仅要考虑力做功的多少，往往还考虑力做功的快慢，为此，需要引入功率的概念。若外力在 Δt 时间内对质点做功为 ΔA，定义平均功率为做功 ΔA 与时间的 Δt 比值，即

$$\bar{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \tag{1.3.23}$$

在时间趋于零时，取平均功率的极限定义为瞬时功率，为

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{1.3.24}$$

功率等于力与速度的标积，是标量。在国际单位制中，功率的单位为瓦特，符号 W。

2. 质点动能定理

如图 1.14 所示，分别用 $\vec{v}_a$ 和 $\vec{v}_b$ 表示它在起点 a 和终点 b 处的速度。根据牛顿第二定律，有 $\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$，等式两边同时点乘 $\mathrm{d}\vec{r}$，有 $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$，其中

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m\mathrm{d}\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = m\mathrm{d}(\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}) = \mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)$$

因此有 $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)$，积分得

$\displaystyle\int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{v_a}^{v_b} \mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$，定义状态函数动能，大小为质量乘以速度平方的一半，即 $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{p^2}{2m}$，上式可表示为

$$A_{ab} = E_{kb} - E_{ka} \tag{1.3.25}$$

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量，称为动能定理。动能定理仅适用于惯性系，并且此质点的动能定理同样适用于质点系。

例 9 一物体从高度 h 处，以初速率 v_0 竖直向下或沿水平方向抛出。试用动能定理计算在这两次抛掷中物体落地的速率。

解　(1) 竖直下抛过程

设在此过程中重力对物体所做的功为 A_1，物体落地速率为 v_1，根据动能定理有

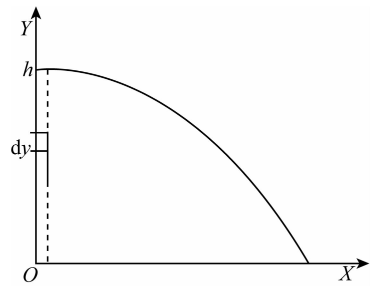
$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2=A_1$$

建立如图所示直角坐标系，重力的功 A_1 可表示为

$$A_1=-\int_h^0 mg\,\mathrm{d}y=mgh$$

将此结果代入上式可得

$$v_1=\sqrt{v_0^2+2gh}$$



例 9 图

(2) 平抛过程

设在此过程中重力对物体所做的功为 A_2，物体落地速率为 v_2，于是有

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_0^2=A_2$$

重力的功 A_2 可表示为

$$A_2=-\int_h^0 mg\,\mathrm{d}y=mgh$$

物体落地速率 v_2 为

$$v_2=\sqrt{v_0^2+2gh}=v_1$$

(二) 势能

1. 几种保守力的功

在给出了功的计算方法后，研究几种常见力的功，即万有引力、重力和弹力的功。

万有引力的功：

设有一质量为 m' 的质点，在它的万有引力场中的 c 点处，有一质量为 m 的质点，c 点到 O 点的距离为 $r(t)$，如图 1.15 所示。通常选择无穷远处为万有引力势能的零势能位置。m 由 A 点移动到 B 点时力 $\vec{F}$ 做功为

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_A^B -G\frac{m'm}{r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

因为 $\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=r|\mathrm{d}r|\cos\theta=r\mathrm{d}r$，所以

$$A=\int_{r_A}^{r_B}-G\frac{m'm}{r^2}\mathrm{d}r=-\left[\left(-G\frac{m'm}{r_B}\right)-\left(-G\frac{m'm}{r_A}\right)\right]$$

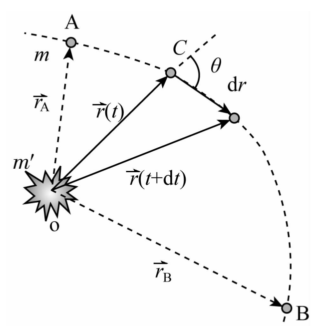


图 1.15　万有引力的功

重力的功：

在重力的作用下，沿图 1.16 所示的路径从 M 点运动到 M_0 点，研究在此过程中重力的功。首先将力和位移都写成矢量形式

$$\vec{F}=-mg\,\vec{k},\ \mathrm{d}\,\vec{r}=\mathrm{d}x\,\vec{i}+\mathrm{d}y\,\vec{j}+\mathrm{d}z\,\vec{k}$$

则重力做功为

$$A=\int_M^{M_0}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}=\int_{z_M}^{z_{M_0}}-mg\,\mathrm{d}z=-(mgz_{M_0}-mgz_M)$$

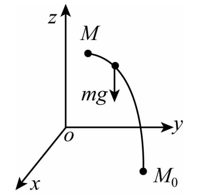


图 1.16　重力的功

弹力的功：

如图 1.17 所示，质量为 m 的小球，在弹力的作用下，从位置坐标为 x_a 处运动到 x_b 处，研究在此过程中弹力的功。小球受到的弹簧的弹力为 $\vec{F}=-kx\vec{i}$

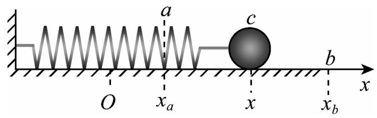


图 1.17　弹力的功

则弹力做功为

$$A=\int_{x_a}^{x_b}F\,\mathrm{d}x=\int_{x_a}^{x_b}-kx\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

2. 势能和势能曲线

从上述三种力做功的结果可以看出，所做的功仅由相互作用质点的始末相对位置决定，与路径无关。我们定义：质点在保守力场中某 M 点的势能，在量值上等于质点从 M 点移动至零势能点 M_0 的过程中保守力 $\vec{F}$ 所做的功，如用 E_p 代表质点在 M 点时的势能，则有

$$E_p=\int_{M}^{M_0}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{1.3.26}$$

通过上面的分析，得到如下两个论断：(1) 保守力做功等于势能函数 E_p 变化的负值；(2) 物体在某点所具有的势能为把物体从该点移到势能为零处保守力所做的功；(3) 势能是状态函数，是属于系统的，具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关。

与保守力相对的为非保守力，是指力所做的功与路径有关。最典型的非保守力为摩擦力。

下面讨论某些场合下的势能公式。相距为 r 的两个质点 m 与 m'，其万有引力势能为

$$E_p=-G\frac{m'm}{r} \tag{1.3.27}$$

这里通常选择无穷远处为引力势能的零点。

如果有一个均匀的重力场，当不涉及可与地球半径相比的高度，重力是一个沿垂直方向的恒力，所做的功就是力乘以垂直距离，于是重力势能为

$$E_p=mgz \tag{1.3.28}$$

这里通常选择重力势能的零点为 $z=0$ 处。

若选择弹簧的平衡位置 $x=0$ 处为势能零点，则将弹簧从平衡位置压缩距离 x 时所具有的弹性势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2 \tag{1.3.29}$$

既然势能是状态的函数，因此，可以给出势能函数随位置坐标的变化关系曲线，称为势能曲线。图 1.18 为上述三个势能的势能曲线。用保守力的功可以计算物体在某点所具有的势能；反过来，如果已知势能函数，也应该能从其对路径的导数求出保守力来。

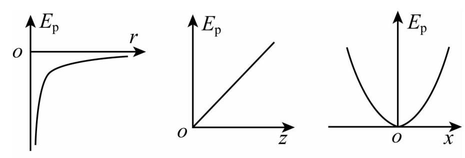


图 1.18　势能曲线

(三) 质点系功能原理和机械能守恒

1. 质点系动能定理

对于大量质点构成的系统，若在质点间存在着各种内力，同时外界还对质点系作用着各种外力。在内力和外力的共同作用下，系统中每个质点的动能都要发生变化。对于其中的第 i 个质点来说，它所受力的功与动能之间的关系要满足前面讲过的质点的动能定理

现在，我们将质点的动能定理推广到质点系。设质点系由 n 个有相互作用的质点组成，其中第 i 个质点的质量为 m_i，所受内力(系统内其他质点对此质点作用力的矢量和) 为 $\vec{f}_i$，所受外力

(系统外的物体对此质点作用力的矢量和)为 $\vec{F}_i$。设在某个变化过程中,m_i 上的外力与内力分别对它所作之功为 $A_{i外}$ 与 $A_{i内}$,使该质点的速率由 v_{ia} 变为 v_{ib},则由质点动能定理有

$$A_{i外} + A_{i内} = \frac{1}{2}m_i v_{ib}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{ia}^2$$

对于系统中的所有质点

$$\sum_i A_{i外} + \sum_i A_{i内} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ib}^2 - \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ia}^2 \tag{1.3.30}$$

令

$$A_{外} = \sum_i A_{i外}, A_{内} = \sum_i A_{i内},$$

$$E_{ka} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ia}^2, E_{kb} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ib}^2$$

则(1.3.30)可表示为

$$A_{外} + A_{内} = E_{kb} - E_{ka} \tag{1.3.31}$$

由此得到结论,质点系所受合外力和合内力对质点所做的功总和等于质点系动能的增量,称为质点系的动能定理。

2.质点系功能原理

对系统的内力来说它有保守力和非保守力之分。因此内力的功可以分为两部分,即保守内力的功 $A_{保内}$ 和非保守内力的功 $A_{非保内}$,即 $A_{内} = A_{保内} + A_{非保内}$,其中保守内力的功 $A_{保内}$ 可用系统势能增量的负值表示 $A_{保内} = -\Delta E_p$,因此,动能定理表达式(1.3.31)可表示为

$$A_{外} + A_{非保内} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E \tag{1.3.32}$$

式中 ΔE 为系统机械能的增量。上式表明,当系统从初始状态变化到末状态时,它的机械能的增量等于外力所做的功与非保守内力所做的功的总和。这个结论称为质点系的功能原理。

3.机械能守恒定律

一个系统的机械能定义为系统内物体的动能 E_k 与势能 E_p 的总和,用 E 表示,数学表达式为 $E = E_k + E_p$。

由功能原理可知,如果外力对系统做的功为零,系统内部又没有非保守内力做功,则在运动中系统的动能与势能之和将保持不变,即当 $A_{外} = 0, A_{非保内} = 0$ 时

$$E_k + E_P = 常量 \tag{1.3.33}$$

这就是机械能守恒定律。当系统的机械能守恒时,系统内各质点的动能仍然可以相互传递,系统的动能与势能之间以及系统的不同类型势能之间都可以相互转化。但是,系统的动能与势能的总和保持恒定。

(四)能量守恒定律

在机械运动范围内,我们所讨论的能量只是动能和势能。物体运动形式是多样化的,我们还将遇到其他形式的能量,比如电能、磁能、热能还有原子能等等。科学研究发现,系统机械能增大或减小的同时,必然有其它形式的能量减小或增大,而系统的各种形式能的总和保持不变。由此可见,自然界中必然存在着比机械能守恒定律更为普遍的能量守恒定律。

系统机械能守恒的条件是外力和非保守内力做功为零。如果外力和非保守内力做功不为零时,则系统的机械能将发生变化。这说明,自然界中除了机械能之外,还存在着其他形式的能量,热能、电能、化学能、核能等都是能量存在的形式。各种形式能量之间是可以相互转换的,如水力发电是机械能向电能的转换,燃烧煤炭发电是热能向电能的转换,蒸汽机实现的是热能向机械能的转换,电动机实现的则是电能向机械能的转换等。实验表明,对于一个孤立系统,各种形式能量之间可以相互转换,但在转换的过程中,各种形式能量的总和始终保持不变,这称为能量转换和守恒定律。能量转换和守恒定律是自然界中又一个最普遍的规律。

能量守恒定律表明，只要在所讨论的时间间隔内质点间的相互作用力不直接发生变化，那么，就会有一种由组成系统的各质点的位置和速度构成的标量函数，它对于时间的变化来说是个不变量。能量是运动的标量恒量，如果系统与外界相互作用，它不仅包括各种外界条件（例如引力、电场或磁场）的变化，而且包括了在有关时间间隔内物理定律或基本物理常数（例如 g、e 或 m）可能有的任何变化。必须清楚，能量守恒定律并没有向我们提供运动方程 $\vec{F}=m\vec{a}$ 中未曾包括的新知识。

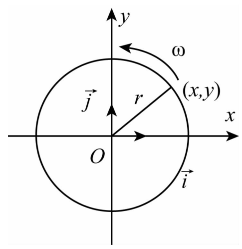
习　题

1.1　质点沿 x 轴作直线运动，t 时刻的坐标为 $x=4.5t^2-2t^3$（SI）．试求：

（1）第 2 秒内的平均速度；

（2）第 2 秒末的瞬时速度；

（3）第 2 秒内的路程。



题 1.2 图

1.2　对于在 xy 平面内，以原点 O 为圆心作匀速圆周运动的质点，

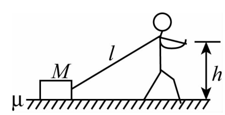
（1）试用半径 r、角速度 ω 和单位矢量 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 表示其 t 时刻的位置矢量．已知在 $t=0$ 时，$y=0$，$x=r$，角速度 ω 如图所示；

（2）求出速度 $\vec{v}$ 与加速度 $\vec{a}$ 的矢量表示式；

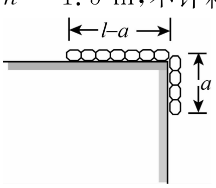
（3）试证加速度指向圆心。

1.3　质量 $m=2$ kg 的物体沿 x 轴作直线运动，所受合外力 $F=10+6x^2$（SI）．如果在 $x=0$ 处时速度 $v_0=0$；试求该物体运动到 $x=4$ m 处时速度的大小．

1.4　一人在平地上拉一个质量为 M 的木箱匀速前进，如图．木箱与地面间的摩擦系数 $\mu=0.6$．设此人前进时，肩上绳的支撑点距地面高度为 $h=1.5$ m，不计箱高，问绳长 l 为多长时最省力？



题 1.4 图



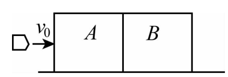
题 1.5 图

1.5　一链条总长为 l，质量为 m，放在桌面上，并使其部分下垂，下垂一段的长度为 a．设链条与桌面之间的滑动摩擦系数为 μ．令链条由静止开始运动，则

（1）到链条刚离开桌面的过程中，摩擦力对链条作了多少功？

（2）链条刚离开桌面时的速率是多少？

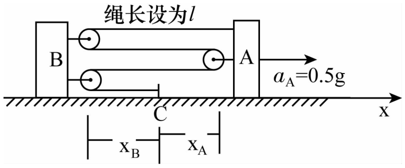
1.6　如图所示，有两个长方形的物体 A 和 B 紧靠着静止放在光滑的水平桌面上，已知 $m_A=2$ kg，$m_B=3$ kg．现有一质量 $m=100$ g 的子弹以速率 $v_0=800$ m/s 水平射入长方体 A，经 $t=0.01$ s，又射入长方体 B，最后停留在长方体 B 内未射出．设子弹射入 A 时所受的摩擦力为 $F=3\times10^3$ N，求：



题 1.6 图

（1）子弹在射入 A 的过程中，B 受到 A 的作用力的大小。

(2) 当子弹留在 B 中时，A 和 B 的速度大小。



题 1.7 图

1.7　在水平桌面上放置 A、B 两物体，用一不可伸长的绳索按图示的装置把它们连接起来。C 点与桌面固定。已知物体 A 的加速度 $a_A = 0.5g$，求物体 B 的加速度。

1.8　质量为 m 的物体与轻弹簧相连，最初，m 处于使弹簧既未压缩也未伸长的位置，并以速度 ν_0 向右运动。弹簧的劲度系数为 k，物体与支撑面之间的滑动摩擦系数为 μ。求证物体能达到的最远距离为 $= \frac{\mu mg}{k}\left(\sqrt{1+\frac{k\nu_0^2}{\mu^2 mg^2}}-1\right)$。

第二章　刚体定轴转动

引言

当物体运动或受到外力作用时，如果物体内任意两点之间的距离保持不变，那么，此物体的形状和大小就保持不变，我们把这样的物体称作刚体。刚体是自然界中比较常见的一种质点系，因此了解其运动规律具有重要的意义，与质点类似，可以从质点及质点系的运动规律出发来讨论刚体的运动，这是研究刚体运动的基本方法，刚体也是一种理想化的模型，刚体的运动十分复杂，本章主要介绍一种比较简单运动形式 —— 刚体定轴转动的处理，根据研究问题的性质，从刚体定轴转动的相应运动定理或守恒定律出发处理问题。

§2－1　刚体的运动

在实际情况中，物体受力以后肯定是要发生变形的，因此，没有真正的刚体，刚体和质点一样，只是一种理想化的物理模型。刚体的运动比较复杂，但有两种最简单的运动形式，即平动和转动。

一、刚体的平动和定轴转动

如果刚体在运动过程中，任意两点之间的连线在空间的指向始终保持平行，这样的运动就称之为平动，如图 2.1 所示，此时整个刚体的运动就等效成质点的运动，所以描述刚体的平动，可以用一点的运动来代表，通常选择质心来代表整个刚体的运动，因此常用刚体质心的运动代替整个刚体的运动。

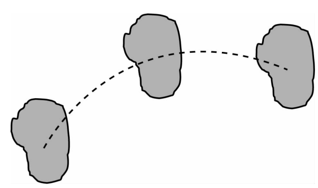


图 2.1　刚体的平动

当刚体中所有质点都绕同一直线作圆周运动时，这种运动称之为转动，如图 2.2 所示，此直线称为转轴，与转轴垂直的平面称为转动平面。如果在转动过程中，刚体的转轴是固定的，称为定轴转动，如门的转动、机床上各种齿轮、飞轮通常都是定轴转动；刚体的转轴在转动过程中是可以变化的，称为非定轴转动，如保龄球的转动，转动中轴是运动的。

对于刚体的一般运动，都可以看作是质心的平动和绕通过质心轴的转动的合成。例如，一个车轮的滚动，可看成是车轮随着转轴的平动和车轮绕转轴的转动的合成；士兵向目标投手榴弹，手榴弹在空中整体作平抛运动，同时又绕通过质心轴作转动，此时，手榴弹的运动为质心的平抛运动和绕质心的转动的合成。

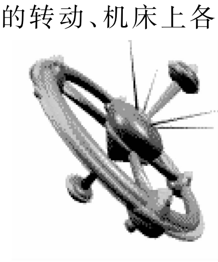


图 2.2　刚体的转动

二、刚体定轴转动的描述

刚体定轴转动时，刚体上所有的质点都在各自的转动平面上绕轴作圆周运动，如图 2.3 所示，刚体在确定转动时，可以在除轴以外的任何地方记下一点，只要知道这个点运动到什么地方，就能准确地说出物体的位置，而描述这个点的位置，只要用一个角度就够了，因此以 ox 为参考方向，刚体上任一质点的位置可由角位置 θ 确定。在任意时刻，θ 确定了刚体相对于参考轴转

过的角度，这个角度定义为角坐标，它代替了确定物体位置的坐标 r。一般情况下，角坐标是时间的函数，即

$$\theta = \theta(t) \tag{2.2.1}$$

由于刚体的形状、大小不变，转轴也是固定不动的，那么只要刚体上的一个质点的位置确定，刚体上其他质点的位置也就确定了。可见描述刚体的位置只需要一个角位置 θ，所以 θ 称为角位置或角坐标，一般规定角坐标逆时针转向为正。

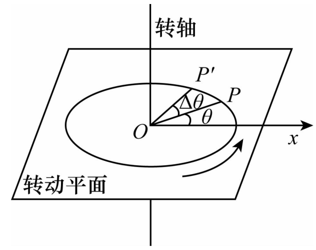


图 2.3 刚体定轴转动的描述

刚体做定轴转动时，角位置发生变化，在 Δt 时间内转过的角度 $\Delta\theta$ 称为角位移。角位移是描述刚体转动位置变化的物理量。一般规定角位移逆时针转向为正。

当刚体绕固定轴转动时，角位置 θ 要随时间改变，即 $\theta=\theta(t)$。如果经过时间 $\mathrm{d}t$ 刚体转过角位移 $\mathrm{d}\theta$，则刚体的角速度为

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{2.2.2}$$

可见，角速度是描述刚体转动快慢和转动方向的物理量。角速度是矢量，方向可由右手螺旋定则来确定，如图 2.4 所示。当角速度的方向沿着 z 轴的正方向时，$\omega>0$；当角速度的方向沿着 z 轴的负方向时，$\omega<0$。角速度的单位为弧度每秒，符号表示为 rad/s。

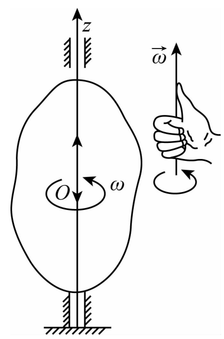


图 2.4 角速度方向的确定

当刚体作定轴转动时，如果角速度是变量，刚体就产生了角加速度

$$\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{2.2.3}$$

可见，角加速度是描述角速度变化快慢的物理量。角加速度是矢量，而在定轴转动中角加速度的方向只能沿着转轴，所以可以用正负标量来表示它们，当刚体加速转动时，$\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\omega}$ 的方向相同，二者符号相同；当刚体减速转动时，$\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\omega}$ 的方向相反，二者符号相反。角加速度的单位为弧度每秒平方，符号表示为 $\mathrm{rad/s^2}$。

用角量来描述刚体的定轴转动，同样也可用线量描述刚体的定轴转动，就要寻找转动动力学和质点动力学规律的联系，即要建立角量和线量的联系。由质点动力学，有 $s=\theta r$，若 r 一定，上式对时间求导数，可得 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}r$，其中 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 是该点的线速率，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 是刚体的角速度，因此

$$v = \omega r \tag{2.2.4}$$

上式表明，刚体各个点具有相同的角速度，半径较大处则具有较大的线速率。将式(2.2.4)对时间求导，有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}r$，式中，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 简称为切向加速度，为线加速度的一部分，表示 v 大小的变化，并且和该点的路径相切，称为该点的线加速度的切向分量，即

$$a_t = \beta r \tag{2.2.5}$$

同理，在讨论匀速率圆周运动时，得到沿圆轨道运动的质点具有线加速度的径向分量，表示 $\vec{v}$ 方向的变化，简称为法向加速度，即

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{2.2.6}$$

对于一般的曲线运动，取 ρ 为其曲率半径，自然坐标系中加速度可表示为

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \tag{2.2.7}$$

§2－2　刚体定轴转动的转动定律

一、刚体对转轴的力矩

在研究刚体转动动力学时，必须引进一个和力有关的新的物理量，使这个新的物理量对转动的关系就像力对质点运动的关系那样，称之为力矩。力是使物体改变运动状态的原因，而改变刚体转动状态的原因就是力矩。

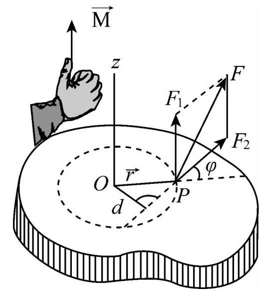


图 2.5　力产生的力矩

设一刚体可绕 oz 轴转动，如图 2.5 所示，如果力 $\vec{F}_2$ 在转动平面内，力 $\vec{F}_2$ 的作用点为 P 点，o 点为转轴与转动平面的交点，$\vec{r}$ 为力的作用点 P 对 o 点的位矢，d 为力的作用线到转轴的垂直距离，φ 为位矢 $\vec{r}$ 与力 $\vec{F}_2$ 之间所夹的锐角，则力 $\vec{F}_2$ 对转轴 oz 的力矩为

$$M = F_2 \mathrm{d} = F_2 r \sin\varphi \tag{2.2.8}$$

如果力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，而是空间的力，如图 2.5 所示，可将力分解为平行于轴的力 $\vec{F}_1$ 和垂直于轴的力 $\vec{F}_2$，平行于轴的力 $\vec{F}_1$ 不能改变刚体的转动状态，因此不形成力矩。$\vec{F}_2$ 在转动平面内，其力矩就等于力 $\vec{F}$ 对轴的力矩，所以力 $\vec{F}$ 对转轴 oz 的力矩还可写为

$$M = F_2 \mathrm{d} = F_2 r \sin\varphi \tag{2.2.9}$$

力矩是矢量，其矢量表达式为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.2.10}$$

大小为 $M = Fr\sin\varphi = F\mathrm{d}$，方向用右手螺旋来判断，如图 2.5 所示。

需要注意以下几点：(1) 刚体所受合力的力矩等于各分力矩的矢量和。(2) 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消。

二、刚体的转动定律

(一) 转动定律

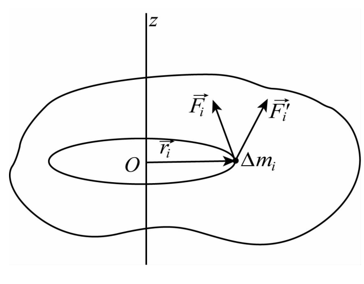


图 2.6　刚体的转动定律

由牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 可得到质点所受的合外力与加速度的定量关系。同理，在外力矩的作用下，刚体的转动状态发生变化，会产生角加速度，也可以得到合外力矩与角加速度的定量关系。

如图 2.6 所示，刚体绕 oz 轴转动，在刚体上任取一质元，质量为 Δm_i，该质元以半径 r_i 绕 O 点作圆周运动，若 Δm_i 所受的力分为内力和外力。设所受内力和为 $\vec{F}'_i$，外力和为 $\vec{F}_i$，且 $\vec{F}'_i$ 和 $\vec{F}_i$ 都在转动平面内，则受力 $\vec{F}$ 与加速度关系为，$\vec{F}'_i + \vec{F}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$，则内力 $\vec{F}'_i$ 和外力 $\vec{F}_i$ 的切向分力有，$F'_{i\tau} + F_{i\tau} = \Delta m_i a_{i\tau}$，其中 $a_{i\tau}$ 为 Δm_i 的切向加速度，由(2.2.5) 可得

$$F'_{i\tau} + F_{i\tau} = \Delta m_i r_i \beta \tag{2.2.11}$$

将(2.2.11) 式两边同乘 r_i，得 $F'_{i\tau} r_i + F_{i\tau} r_i = \Delta m_i r_i^2 \beta$，上式中 $F'_{i\tau} r_i$ 为内力 $\vec{F}'_i$ 的力矩，$F_{i\tau} r_i$ 为外力 $\vec{F}_i$ 的力矩，即外力与内力的力矩和为

$$M_{ej} + M_{ij} = \Delta m_j r_j^2 \beta$$